Chapitre 36

Familles sommables

Compétences attendues.

- ✓ Calculer la somme d'une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ à l'aide du théorème de sommation par paquets, du théorème de Fubini, . . .
- ✓ Montrer qu'une famille de nombres complexes est sommable, et le cas échéant en calculer la somme.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

Motivations

Le but de ce chapitre est de généraliser la notion de somme infinie à un cadre plus général que celui des séries, par exemple considérer des sommes infinies de suites indexées par $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$ ou encore $\mathbb{Q}$.

Une raison parmi d'autres de vouloir définir de telles sommes vient des probabilités : cette année, nous n'avons travaillé que sur des espaces finis, mais on peut aussi vouloir considérer des variables aléatoires qui prennent une infinité de valeurs. Dès lors, pour définir l'espérance d'une telle variable aléatoire X, nous aurons à donner un sens à :

$$\sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x).$$

Cette définition devra en outre se détacher de l'ordre dans lequel on somme, puisqu'il n'y aura pas de raison de privilégier un ordre sur $X(\Omega)$ par rapport à un autre pour le calcul de $E(X)$.

1 Familles sommables de réels positifs

1.1 L'ensemble $[0, +\infty]$

On note $[0, +\infty] = [0, +\infty[\cup \{+\infty\}$ le sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$ appelé *demi-droite achevée*. Rappelons qu'il s'agit d'un ensemble totalement ordonné, avec pour tout $x \in [0, +\infty]$, $x \leq +\infty$.

Propriété 1

Toute partie de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$.

Nous utiliserons dans la suite les opérations usuelles sur les réels positifs : $x + (+\infty) = +\infty$, $x \times (+\infty) = +\infty$ si $x \neq 0$, et nous ajouterons le un peu moins classique : $0 \times (+\infty) = 0$.

1.2 Somme d'une famille de réels positifs

Notation.

Si I est un ensemble, on note $\mathscr{P}_f(I)$ l'ensemble des parties **finies** de I.

Définition.

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par un ensemble I.

On appelle *somme de la famille* $(u_i)_{i \in I}$, et on note $\sum_{i \in I} u_i$, l'élément de $[0, +\infty]$ défini par :

$$\sum_{i \in I} u_i = \sup \left\{ \sum_{j \in J} u_j,\ J \in \mathscr{P}_f(I) \right\}.$$

Propriété 2 (Cas particuliers)

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille d'éléments de $[0, +\infty]$ indexée par un ensemble I.

(1) Si l'un des u_i vaut $+\infty$, alors $\sum_{i \in I} u_i = +\infty$.

(2) Si I est fini, alors $\sum_{i \in I} u_i$ est la somme finie usuelle des u_i.

(3) Si $I = \mathbb{N}$, alors $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n = \begin{cases} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n & \text{si la série converge} \\ +\infty & \text{si la série diverge} \end{cases}.$

Définition.

Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de réels positifs est dite *sommable* si $\sum_{i\in I} u_i < +\infty$.

Remarques.

- Par définition, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $J \in \mathscr{P}_f(I)$, $\sum_{j\in J} u_i \leq M$.
- La famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ converge. Et dans ce cas, $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$.

1.3 Propriétés de la somme

Propriété 3 (Changement d'indices)

Soient I_1 et I_2 des ensembles, $\sigma : I_1 \to I_2$ une bijection, et $(u_i)_{i\in I_2}$ une famille de réels positifs. Alors :

$$\sum_{i\in I_2} u_i = \sum_{i\in I_1} u_{\sigma(i)}.$$

En particulier, la famille $(u_i)_{i\in I_2}$ est sommable si, et seulement si, la famille $\left(u_{\sigma(i)}\right)_{i\in I_1}$ est sommable.

Corollaire 4 (Invariance par permutation)

Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série à termes positifs, et $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une bijection.

Les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} u_{\sigma(n)}$ sont de même nature. Et en cas de convergence :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}.$$

Mise en garde.

Ainsi, pour une série à **termes positifs**, modifier l'ordre des termes ne change pas la nature de la série, et en cas de convergence, ne change pas la somme de la série. Nous verrons plus loin que ce n'est pas toujours le cas pour des séries à termes de signe quelconque.

Propriété 5 (Croissance)

Soient I un ensemble, $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ des familles d'éléments de $[0, +\infty]$ indexées par I.
Si pour tout $i \in I$, $u_i \leq v_i$, alors :

$$\sum_{i\in I} u_i \leq \sum_{i\in I} v_i.$$

En particulier, si la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Propriété 6 (Linéarité)

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles de réels positifs indexées par un même ensemble I.

(1) Pour tout $\lambda \in [0,+\infty]$: $\displaystyle\sum_{i\in I}(\lambda u_i) = \lambda\left(\sum_{i\in I} u_i\right)$.

(2) $\displaystyle\sum_{i\in I}(u_i+v_i) = \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i$.

Corollaire 7

Avec les hypothèses précédentes :

(1) Si $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, $(\lambda u_i)_{i\in I}$ est sommable.

(2) $(u_i+v_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ le sont.

1.4 Sommation par paquets

Propriété 8 (Restriction)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs indexée par un ensemble I, et soit J une partie de I. Alors :

$$\sum_{i\in J} u_i \leq \sum_{i\in I} u_i.$$

En particulier, si $(u_i)_{i\in I}$ est sommable, alors $(u_i)_{i\in J}$ l'est aussi.

Théorème 9 (*de sommation par paquets positif*)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$ indexée par un ensemble I. Pour toute partition $\{I_k, k\in K\}$ de I :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right).$$

Corollaire 10

Avec les hypothèses précédentes, la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si :

- pour tout $k\in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable ;
- la famille $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable.

Exercice 1. On admet que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$. Montrer que $\displaystyle\left(\frac{1}{(2n+1)^4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable et calculer sa somme.

Théorème 11 *(de Fubini positif)*

Soient I et J des ensembles, $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ une famille d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\sum_{j\in J} u_{i,j} = \sum_{j\in J}\sum_{i\in I} u_{i,j}.$$

En particulier, la famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable si, et seulement si :

- pour tout $i\in I$, $(u_{i,j})_{j\in J}$ est sommable ;
- $\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right)_{i\in I}$ est sommable.

Corollaire 12 (Cas des familles « produits »)

Soient I et J des ensembles, $(a_i)_{i\in I}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des familles d'éléments de $[0,+\infty]$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} a_i b_j = \sum_{i\in I} a_i \times \sum_{j\in J} b_j.$$

Exercice 2. Déterminer $\displaystyle\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} u_{m,n}$ dans les cas suivants :

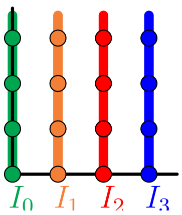
- $\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ u_{m,n} = \dfrac{2^m}{m!n!}$;
- $\forall (m,n)\in\mathbb{N}^2,\ u_{m,n} = \dfrac{1}{(m+n)!}$.

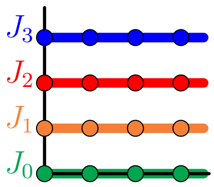
Exercice 3. La famille $\left(\dfrac{1}{(p+q)^3}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

✍ À retenir. Découpages classiques lorsque $I=\mathbb{N}^2$.

On retiendra les découpages suivants lorsque $I=\mathbb{N}^2$:

Partition en lignes ou colonnes.





Pour tous $k,\ell\in\mathbb{N}$:

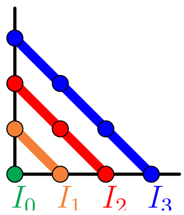
$$I_k = \{(k,j),\ j\in\mathbb{N}\}$$

et

$$J_\ell = \{(i,\ell),\ i\in\mathbb{N}\}.$$

Les partitions $\{I_k,\ k\in N\}$ et $\{J_\ell,\ \ell\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ conduisent au théorème de Fubini.

Partition suivant les diagonales.



Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} I_n &= \{(i,j)\mid i+j=n\} \\ &= \{(i,n-i),\ i\in[\![0,n]\!]\} \end{aligned}$$

Alors $\mathrm{Card}(I_n)=n+1$. Par théorème de sommation par paquets avec la partition $\{I_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, pour toute famille $(u_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ d'éléments de $[0,+\infty]$:

$$\sum_{(i,j)\in\mathbb{N}^2} u_{i,j} = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{(i,j\in I_n} u_{i,j}\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{n} u_{i,n-i}\right).$$

On pensera à l'utiliser quand le terme général $u_{i,j}$ fait intervenir la quantité $i+j$.

Méthode. Comment calculer la somme d'une famille de réels positifs ?

La seule hypothèse de positivité de la famille permet de justifier toutes les opérations sur les sommes : on pourra donc faire des sommations par paquets, permuter des sommes, ... sans plus de justification. Et la famille est sommable si sa somme est finie.

2 Familles sommables de nombres complexes

2.1 Définition

Définition.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de complexes indexée par un ensemble I.
On dit que $(u_i)_{i\in I}$ est *sommable* si la famille de réels positifs $(|u_i|)_{i\in I}$ est sommable.

Remarque. Pour $I = \mathbb{N}$, la famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est sommable si, et seulement si, la série $\sum u_n$ est **absolument convergente**.

Notation.

Soit $\mathbb{K}$ l'un des deux corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On note $\ell^1(I,\mathbb{K})$ l'ensemble des familles sommables indicées par I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exercice 4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que la famille $(z^{ij})_{i,j\in\mathbb{N}^*}$ est sommable si, et seulement si, $|z| < 1$.

Propriété 13 (Comparaison par inégalité)

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de nombres complexes, et soit $(v_i)_{i\in I}$ une famille de réels positifs.
Si pour tout $i \in I$, $|u_i| \leq v_i$ et que la famille $(v_i)_{i\in I}$ est sommable, alors la famille $(u_i)_{i\in I}$ est sommable.

Exercice 5. La famille $\left(\dfrac{\sin(p+q)}{p^2q^2}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est-elle sommable ?

2.2 Somme d'une famille sommable

Notation.

Si x est un réel, on note $x^+ = \max(x,0) = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ et $x^- = \max(-x,0) = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$.
Ainsi, x^+et x^-sont deux réels positifs, et on a toujours $x = x^+ - x^-$et $|x| = x^+ + x^-$.

Propriété 14

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une famille de réels.
Alors $(u_i)_{i\in I}$ est sommable si, et seulement si, les familles (positives) $(u_i^+)_{i\in I}$ et $(u_i^-)_{i\in I}$ sont sommables.

Définition.

Soit $(u_i)_{i\in I}$ une **famille sommable** de réels. On appelle *somme de la famille* $(u_i)_{i\in I}$, et on note $\sum\limits_{i\in I} u_i$, le réel :

$$\sum_{i\in I} u_i = \sum_{i\in I} u_i^+ - \sum_{i\in I} u_i^-.$$

Mise en garde.

Dans le cas particulier où $I=\mathbb{N}$ et $\sum |u_n|$ diverge, on ne donne pas de sens à la notation $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$, alors que la notation $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ peut éventuellement en avoir un si la série $\sum u_n$ converge.

Par exemple :

- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n+1}$ n'est pas définie, alors que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$ existe par le critère des séries alternées ;
- $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!}$ existe puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{n!}$ est absolument convergente, et :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = e^{-1}.$$

Propriété 15

Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes indexée par un ensemble J.
Alors $(u_j)_{j\in J}$ est sommable si, et seulement si, les familles $(\mathrm{Re}\,(u_j))_{j\in J}$ et $(\mathrm{Im}\,(u_j))_{j\in J}$ sont sommables.

Définition.

Soit $(u_j)_{j\in J}$ une **famille sommable** de nombres complexes. On appelle *somme de la famille* $(u_j)_{j\in J}$, et on note $\sum\limits_{j\in J} u_j$, le complexe :

$$\sum_{j\in J} u_j = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}\,(u_j) + i \sum_{j\in J} \mathrm{Im}\,(u_j)\,.$$

En particulier, $\mathrm{Re}\left(\displaystyle\sum_{j\in J} u_j\right) = \displaystyle\sum_{j\in J} \mathrm{Re}(u_j)$ et $\mathrm{Im}\left(\displaystyle\sum_{j\in J} u_j\right) = \displaystyle\sum_{j\in J} \mathrm{Im}(u_j)$.

Propriété 16

Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille sommable de complexes, et soit $\varepsilon>0$.
Alors il existe une partie finie K_ε de J telle que pour tout $K\in\mathscr{P}_f(J)$:

$$K_\varepsilon \subset K \quad\Rightarrow\quad \left|\sum_{j\in J} u_j - \sum_{j\in K} u_j\right| \leq \varepsilon.$$

2.3 Propriétés de la somme

Propriété 17 (Changement d'indices)

Soit $\sigma : J_1 \to J_2$ une bijection entre deux ensembles, et $(u_j)_{j\in J_2}$ une famille de complexes. Alors $(u_j)_{j\in J_2}$ est sommable si, et seulement si, $\left(u_{\sigma(j)}\right)_{j\in J_1}$ est sommable, et si c'est le cas :

$$\sum_{j\in J_2} u_j = \sum_{j\in J_1} u_{\sigma(j)}.$$

Corollaire 18 (Invariance par permutation)

Si la série à valeurs complexes $\sum u_n$ **converge absolument**, alors pour toute permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ est encore absolument convergente, et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Mise en garde.

Ce résultat est **faux pour les séries semi-convergentes** (convergentes mais pas absolument convergentes) : l'ordre de sommation peut influer sur la nature de la série ou la valeur de sa somme. Par exemple, pour la série semi-convergente $\sum \frac{(-1)^n}{n+1}$, on peut montrer que :

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(2)$$

alors qu'en arrangeant les termes d'une autre façon, on obtient :

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln(2)}{2}.$$

On peut même trouver une permutation $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\sum u_{\sigma(n)}$ diverge.

Propriété 19 (Inégalité triangulaire)

Soit $(u_j)_{j\in J}$ une famille sommable de nombres complexes. Alors :

$$\left|\sum_{j\in J} u_j\right| \leq \sum_{j\in J} |u_j|.$$

Propriété 20 (Linéarité)

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_i)_{i\in I}$ deux familles sommables d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda u_i + v_i)_{i\in I}$ est sommable, et :

$$\sum_{i\in I} (\lambda u_i + v_i) = \lambda \sum_{i\in I} u_i + \sum_{i\in I} v_i.$$

Corollaire 21

L'ensemble $\ell^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, et l'application :

$$s : \left\{ \begin{array}{ccc} \ell^1(I,\mathbb{K}) & \to & \mathbb{K} \\ (u_i)_{i\in I} & \mapsto & \displaystyle\sum_{i\in I} u_i \end{array} \right.$$

est une forme linéaire sur $\ell^1(I,\mathbb{K})$.

2.4 Sommation par paquets

Propriété 22 (Restriction)

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable, et J une partie de I. Alors $(u_i)_{i\in J}$ est sommable.

Théorème 23 (*de sommation par paquets*)

Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille **sommable** de nombres complexes, et $\{I_k,\ k\in K\}$ une partition de I. Alors :

- pour tout $k\in K$, $(u_i)_{i\in I_k}$ est sommable ;
- $\displaystyle\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)_{k\in K}$ est sommable ;
- $\displaystyle\sum_{i\in I} u_i = \sum_{k\in K}\left(\sum_{i\in I_k} u_i\right)$.

Exercice 6. Montrer que la famille $\displaystyle\left(\frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{2^n}\right)_{\substack{n,k\in\mathbb{N}^*\\ n>k}}$ est sommable et calculer sa somme.

Théorème 24 (*de Fubini*)

Soit $(u_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}\in\ell^1(I\times J,\mathbb{C})$. Alors :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_{i,j} = \sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J} u_{i,j}\right) = \sum_{j\in J}\left(\sum_{i\in I} u_{i,j}\right).$$

Exercice 7. Montrer l'existence et calculer $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!}$.

Propriété 25 (Cas des familles « produits »)

Soient $(u_i)_{i\in I}$ et $(v_j)_{j\in J}$ deux familles sommables de complexes. Alors $(u_iv_j)_{(i,j)\in I\times J}$ est sommable, et :

$$\sum_{(i,j)\in I\times J} u_iv_j = \left(\sum_{i\in I} u_i\right)\left(\sum_{j\in J} v_j\right).$$

2.5 Produit de Cauchy

Propriété 26

Soit $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}^2}$ une famille sommable de complexes. Alors :

$$\sum_{(m,n)\in\mathbb{N}^2} u_{m,n} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n} u_{p,q}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_{k,n-k}\right).$$

Théorème 27 (*Produit de Cauchy de séries absolument convergentes*)

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries absolument convergentes. Alors la série de terme général $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ est absolument convergente, et :

$$\left(\sum_{p=0}^{+\infty} u_p\right)\left(\sum_{q=0}^{+\infty} v_q\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}\right).$$

Méthode. Comment calculer la somme d'une famille de complexes ?

Le calcul de la somme d'une famille de complexes se fera en deux étapes :

- *on vérifie la sommabilité par un calcul de somme* ***avec*** *module : tous les théorèmes de la première section s'appliquent alors sans autre justification que la positivité ;*
- *une fois la sommabilité vérifiée, tout est permis* ***sans*** *module : changements d'indices, sommations par paquets, permutations, ...*

2.6 Retour sur l'exponentielle complexe et les fonctions trigonométriques.

Oublions tout ce que nous savons au sujet de l'exponentielle et des fonctions trigonométriques, et redéfinissons convenablement ces objets. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument (par exemple par le critère de d'Alembert). On définit alors l'exponentielle de z par :

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Pour $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, par produit de Cauchy de séries absolument convergentes :

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_2^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!}.$$

Ainsi :

$$e^{z_1} \times e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

Puisque $e^0 = 1$, il vient donc $e^{-z}e^z = e^0 = 1$, et donc $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$. En particulier, l'exponentielle est toujours non nulle.

Définissons à présent les fonctions trigonométriques cosinus et sinus, en posant pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{Re}\left(\frac{(i\theta)^n}{n!}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p \frac{\theta^{2p}}{(2p)!}$$

et

$$\sin(\theta) = \operatorname{Im}\left(e^{i\theta}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty}(-1)^p \frac{\theta^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

Des séries, on déduit que le cosinus est pair et le sinus est impair. De plus, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta)^2 + \sin(\theta)^2 = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))(\cos(\theta) - i\sin(\theta)) = e^{i\theta}e^{-i\theta} = 1.$$

D'autre part, pour tous $\theta, \theta' \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta + \theta') = \operatorname{Re}\left(e^{i\left(\theta+\theta'\right)}\right) = \operatorname{Re}\left((\cos\theta + i\sin\theta)\left(\cos\theta' + i\sin\left(\theta'\right)\right)\right) = \cos(\theta)\cos\left(\theta'\right) - \sin(\theta)\sin\left(\theta'\right).$$

On obtient de même toutes les formules d'addition. L'étude des fonctions trigonométriques peut alors être poursuivie :

- la théorie des séries entières (qui sera étudiée l'an prochain) permet de dériver terme à terme ces sommes infinies, de sorte que $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$;
- on peut définir le nombre π comme étant le double du plus petit réel positif annulant cosinus. On vérifie alors que $e^{i\pi/2} = i$, puis que $e^{i\pi} = i^2 = -1$ et $e^{2i\pi} = 1$.