

Fonctions de deux variables

1 Généralités	2
1.1 Topologie de \mathbb{R}^2	2
1.2 Fonctions de deux variables	3
1.3 Graphe	3
1.4 Lignes de niveau	4
2 Continuité	6
2.1 Définition	6
2.2 Opérations sur les fonctions continues	6
3 Dérivées partielles	7
3.1 Dérivées partielles, gradient	7
3.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1	9
3.3 Développement limité d'ordre 1	9
3.4 Dérivée selon un vecteur	10
3.5 Dérivée d'une composée	11
4 Extrema d'une fonction de deux variables	12
4.1 Extrema locaux, extrema globaux	12
4.2 Condition nécessaire	13

Compétences attendues.

- ✓ Justifier qu'une fonction f est continue ou \mathcal{C}^1 .
- ✓ Calculer les dérivées partielles d'une fonction.
- ✓ Déterminer les points critiques d'une fonction pour étudier ses extrema.

1 Généralités

1.1 Topologie de \mathbb{R}^2

Dans tout le chapitre, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur \mathbb{R}^2 et $\|\cdot\|$ la norme euclidienne associée :

$$\forall (x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2, \quad \langle (x, y), (x', y') \rangle = xx' + yy' \quad \text{et} \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En particulier, si $a = (x_1, y_1)$ et $b = (x_2, y_2)$ sont deux points de \mathbb{R}^2 ,

$$\|b - a\| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

représente la distance entre a et b .

Définition.

Soit a un point de \mathbb{R}^2 et $r > 0$.

On appelle *boule ouverte* de centre a et de rayon r l'ensemble :

$$\mathcal{B}(a, r) = \{b \in \mathbb{R}^2 \mid \|b - a\| < r\}.$$

Remarque. $\mathcal{B}(a, r)$ est l'ensemble des points de \mathbb{R}^2 à une distance strictement inférieure à r de a .

Définition.

Une partie \mathcal{O} est un *ouvert* de \mathbb{R}^2 si

$$\forall a \in \mathcal{O}, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \quad \mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}.$$

Soit encore :

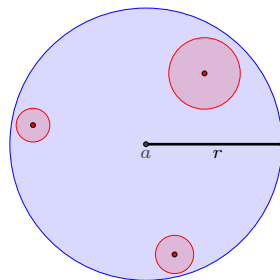
$$\forall a \in \mathcal{O}, \exists r \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in \mathbb{R}^2, \quad \|x - a\| < r \Rightarrow x \in \mathcal{O}.$$

Ainsi, \mathcal{O} est un ouvert de \mathbb{R}^2 si pour tout $a \in \mathcal{O}$, les points « suffisamment proches » de a sont aussi dans \mathcal{O} .

Remarque. Une autre définition (elle sera précisée l'année prochaine) est qu'une partie \mathcal{O} est ouverte si et seulement si **aucun** point de la frontière de \mathcal{O} n'appartient à \mathcal{O} .

Exemples.

- \emptyset et \mathbb{R}^2 sont des ouverts de \mathbb{R}^2 .
- Un ensemble de la forme $]a, b[\times]c, d[$ (avec $a, b, c, d \in \overline{\mathbb{R}}$) est un ouvert de \mathbb{R}^2 .
- La boule ouverte $\mathcal{B}(a, r)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 . On peut le vérifier graphiquement :



Propriété 1 (Propriétés des ouverts)

(1) Si $(\mathcal{O}_i)_{i \in I}$ est une famille d'ouverts de \mathbb{R}^2 (indexée par un ensemble I potentiellement infini), alors $\bigcup_{i \in I} \mathcal{O}_i$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

(2) Si $\mathcal{O}_1, \dots, \mathcal{O}_n$ sont des ouverts de \mathbb{R}^2 (en nombre fini), alors $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{O}_i$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

1.2 Fonctions de deux variables

Définition.

On appelle *fonction de deux variables* toute fonction f définie sur une partie Ω de \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R} :

$$f : (x, y) \in \Omega \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}.$$

Exemples.

- $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 4xy^2$.
- $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) + 2e^x$.
- $h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = \frac{xy}{x - y}$ sur le domaine $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

Définition.

On appelle *fonction polynomiale* toute fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x, y) \mapsto x^i y^j$, où i et j sont des entiers naturels.

Parmi les fonctions polynomiales, on appelle :

- *fonctions coordonnées* les fonctions $p_1 : (x, y) \mapsto x$ et $p_2 : (x, y) \mapsto y$.
- *fonction affine* toute fonction de la forme :

$$f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ax + by + c$$

où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Exemple. La fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^3 - 4xy^2$ est une fonction polynomiale.

1.3 Graphe

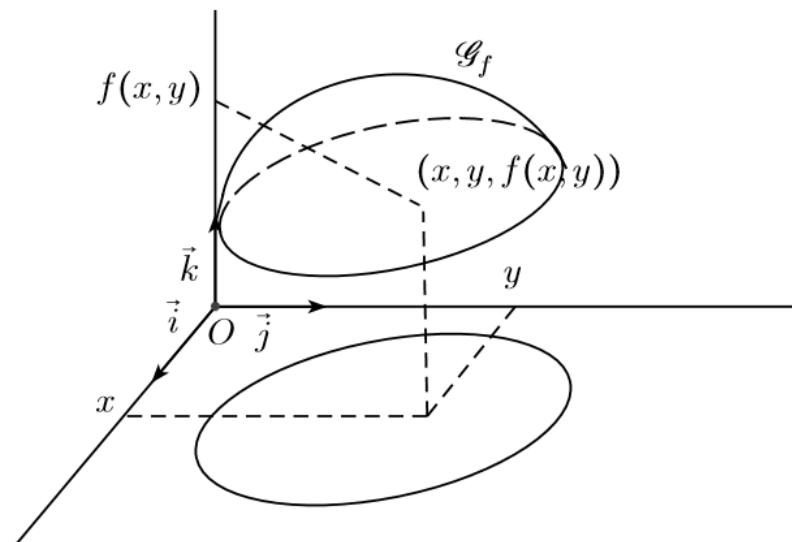
Définition.

Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de \mathbb{R}^2 .

On appelle *graphe* de f le sous-ensemble de \mathbb{R}^3 défini par :

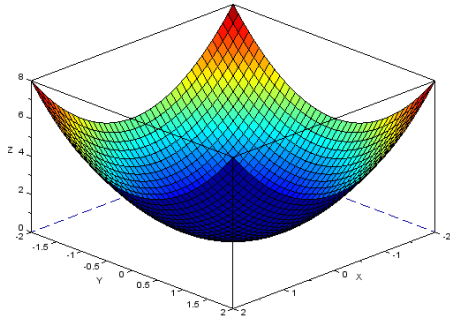
$$\mathcal{G}_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega \text{ et } z = f(x, y)\}.$$

Représentation graphique. Le graphe de f est une surface qu'on représentera dans l'espace \mathbb{R}^3 .



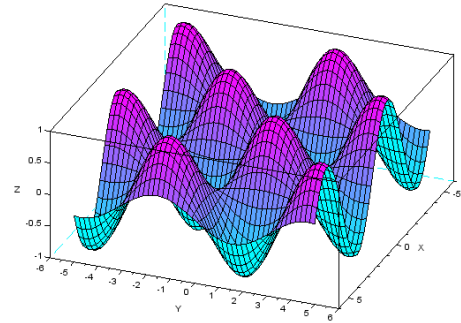
Exemples.

- Le graphe de $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 + y^2$ est :



Paraboloïde elliptique.

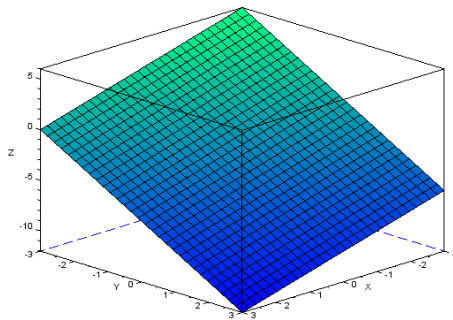
- Le graphe de $g : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x) \sin(y)$ est :



- Si on considère une partie de la surface du globe, et qu'on la suppose plate, alors tout point de la surface est représenté par deux coordonnées x et y (qui sont la latitude et la longitude). Si on note $h(x, y)$ l'altitude en ce point, le graphe de la fonction h représente la surface de la Terre.

Cas particulier : graphe d'une fonction affine.

Soit $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ax + by + c$ une fonction affine. Le graphe de f est le plan affine de \mathbb{R}^3 d'équation $z = ax + by + c$.



1.4 Lignes de niveau

Définition.

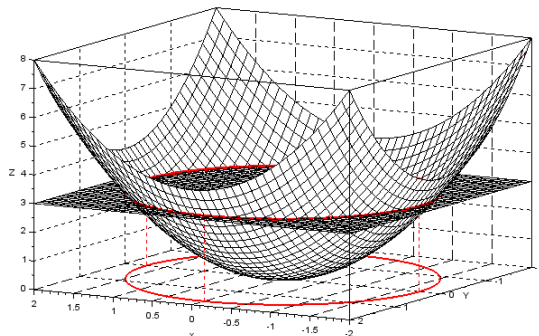
Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de \mathbb{R}^2 .

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on appelle *ligne de niveau* λ de f l'ensemble :

$$\mathcal{C}_\lambda(f) = f^{-1}(\{\lambda\}) = \{(x, y) \in \Omega \mid f(x, y) = \lambda\}.$$

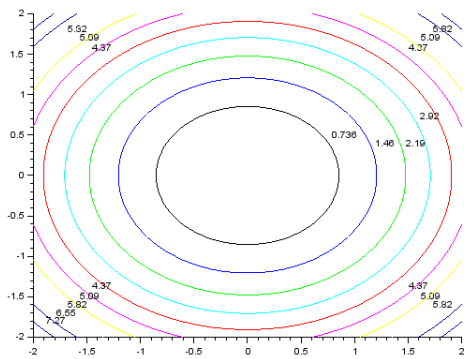
Remarques.

- La ligne de niveau $\mathcal{C}_\lambda(f)$ s'obtient en faisant l'intersection du graphe de f avec le plan horizontal d'équation $z = \lambda$.

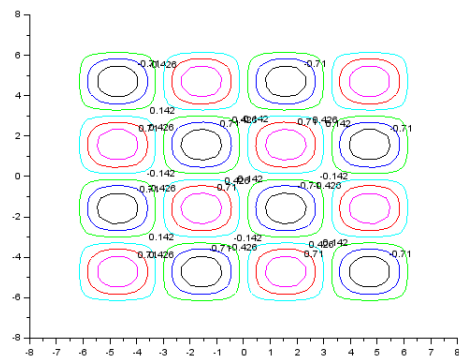


Ligne de niveau $\lambda = 3$ de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.

- L'indication d'un nombre suffisant de lignes de niveau permet d'avoir une représentation assez fidèle du graphe de la fonction.



Des lignes de niveau de $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$.



Des lignes de niveau de $g : (x, y) \mapsto \sin(x) \sin(y)$.

Exemple. Si f est la fonction qui à la longitude et la latitude associe l'altitude, alors les lignes de niveau représentent les points qui sont à la même altitude : si on se promène sur une ligne de niveau, on ne monte ni ne descend. Ce sont ces lignes (dites de niveau) qui sont représentées sur les cartes topographiques.



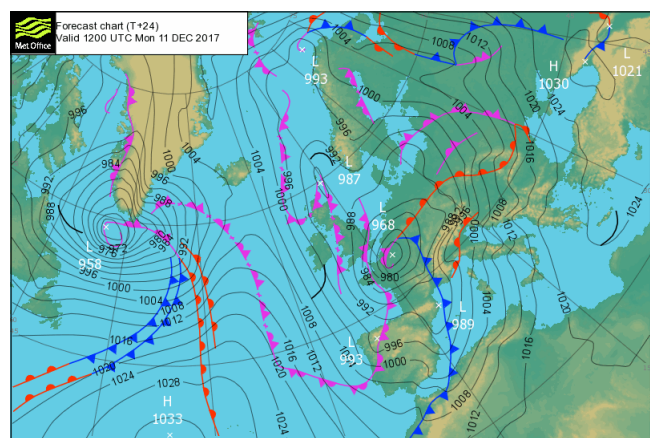
Carte topographique du Monte Cinto (plus haut sommet de Corse).



Votre professeur au sommet du Monte Cinto !

Exemple. Si f est la fonction qui à la longitude et à la latitude associe la pression (au niveau de la mer), alors les lignes de niveau relient des points d'égale pression. Ces lignes sont appelées en météorologie des *courbes isobares*.

Un ensemble d'isobares incurvées entourant une zone de basse (resp. haute) pression indique une dépression (resp. anticyclone), repéré par un L (resp. H) sur la carte de surface. La vitesse du vent est fonction de l'écartement des isobares : plus les isobares sont serrées, plus la pression varie rapidement, plus le vent souffle fort. Pour apprendre à lire une carte de pression atmosphérique, on pourra consulter ce [lien](#).



Carte de surface.

2 Continuité

2.1 Définition

Définition.

Soit Ω une partie de \mathbb{R}^2 , et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

- On dit que f est *continue en un point* $a \in \Omega$ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \Omega, \|x - a\| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

- On dit que f est *continue sur* Ω lorsque f est continue en tout point de Ω .

Exemples.

- Une fonction constante est continue sur son ensemble de définition.
- La fonction coordonnée $p_1 : (x, y) \mapsto x$ est continue sur \mathbb{R}^2 . En effet, considérons $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$. Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\eta = \varepsilon$. Pour tout $(x, y) \in \mathcal{B}(a, \varepsilon)$:

$$|a_1 - x| < \|a - (x, y)\| < \varepsilon, \text{ soit encore } |p_1((x, y)) - p_1(a)| < \varepsilon.$$

Ainsi, p_1 est continue en a , et donc sur \mathbb{R}^2 .

On montrerait de même que $p_2 : (x, y) \mapsto y$ est continue.

2.2 Opérations sur les fonctions continues

Propriété 2 (Opérations sur les fonctions continues)

Soient f et g sont deux fonctions continues sur une partie Ω de \mathbb{R}^2 . Alors :

- les fonctions λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$ et $f \times g$ sont continues sur Ω ;
- si g ne s'annule pas sur Ω , les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont continues sur Ω ;
- si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur une partie I de \mathbb{R} et que f est à valeurs dans I , alors $\varphi \circ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur Ω .

Corollaire 3 (Continuité des fonctions polynomiales)

Les fonctions polynomiales de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} sont continues sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 1. Montrer la continuité des fonctions suivantes :

- $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \max(x, y)$;
- $N : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|$.

Propriété 4 (Image réciproque d'un intervalle ouvert par une fonction continue)

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$:

- $f^{-1}(]-\infty, a[)$ et $f^{-1}(]a, +\infty[)$ sont des ouverts de \mathbb{R}^2 ;
- $f^{-1}(]a, b[)$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Exemples.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 2y^2 < 3\}$ est ouvert car image réciproque de $] -\infty, 3[$ par la fonction $(x, y) \mapsto x^2 + 2y^2$ continue car polynomiale.
- De même, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y \neq 0\}$. En effet, cet ensemble se récrit :

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x - y < 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) \cup f^{-1}(\mathbb{R}_-^*)$$

où $f : (x, y) \mapsto x - y$ est continue car polynomiale. Cet ensemble est donc ouvert car union de deux ouverts.

3 Dérivées partielles

Dans toute la suite, \mathcal{O} désigne un **ouvert** de \mathbb{R}^2 .

3.1 Dérivées partielles, gradient

Définition.

Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{O}$.

Puisque \mathcal{O} est un ouvert, il existe $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}$. On définit alors :

- la *première fonction partielle* de f en a par :

$$f_1 : \begin{cases}]a_1 - r, a_1 + r[& \rightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto f(x, a_2) \end{cases} ,$$

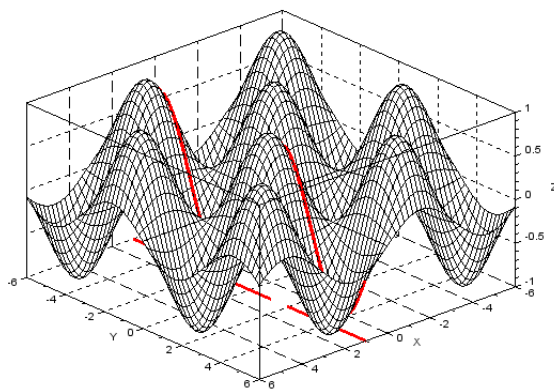
- la *seconde fonction partielle* de f en a par :

$$f_2 : \begin{cases}]a_2 - r, a_2 + r[& \rightarrow \mathbb{R} \\ y & \mapsto f(a_1, y) \end{cases} .$$

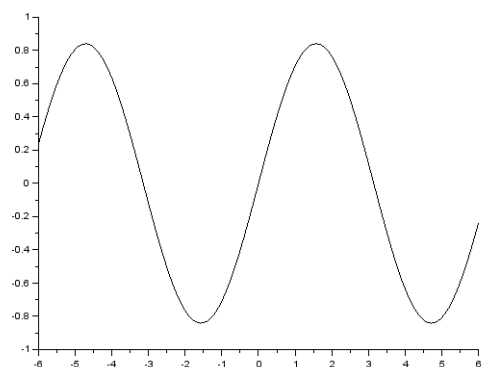
Remarques.

1. Il est facile de prouver que si f est continue en a , alors f_1 est continue en a_1 et f_2 est continue en a_2 .
2. L'ensemble de définition des fonctions partielles n'est pas clairement défini puisqu'il n'y a pas unicité du r de l'énoncé. Mais ce n'est pas grave, seul leur comportement en a_1 ou a_2 va nous intéresser dans la suite, l'essentiel est donc qu'elles soient définies sur un voisinage de a_1 ou a_2 .

Remarque. Si $a = (a_1, a_2)$, la courbe de la deuxième fonction partielle $f_{a,2} : y \mapsto f(a_1, y)$ s'obtient en faisant l'intersection du graphe \mathcal{G}_f de f avec le plan d'équation $x = a_1$. Représentons $f_{a,2}$ dans le cas où $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x) \sin(y)$ et $a = (1, -\pi)$.



Intersection de \mathcal{G}_f et du plan d'équation $x = 1$.



Graphe de $f_{a,2} : y \mapsto \sin(1) \sin(y)$.

Définition.

Soient $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{O}$.

- On dit que f admet une *première dérivée partielle* en a si f_1 est dérivable en a_1 , c'est-à-dire si :

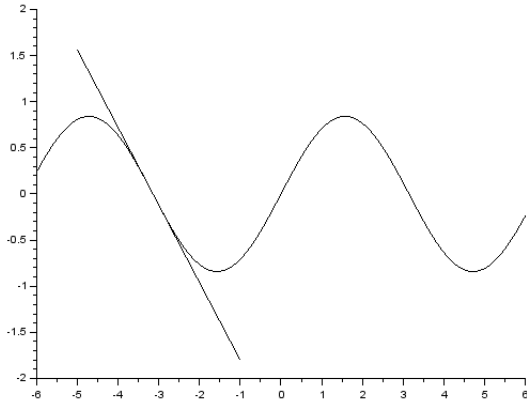
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1 + h, a_2) - f(a_1, a_2)}{h}$$

existe et est finie. Lorsque c'est le cas, on note $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ cette limite.

- De même, on définit la *seconde dérivée partielle* de f en a , et on note $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$, comme étant la dérivée de f_2 en a_2 , si elle existe, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2 + h) - f(a_1, a_2)}{h}.$$

Exemple. Reprenons $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \sin(x) \sin(y)$ et $a = (1, -\pi)$. Alors $\frac{\partial f}{\partial y}(1, -\pi)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f_2 en $-\pi$.



Tangente en $-\pi$ à la courbe de f_2 .

Pour tout $y \in \mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, y) = \sin(1) \cos(y)$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, -\pi) = \sin(1) \cos(-\pi) = -\sin(1) \approx -0,84.$$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f_2 en $-\pi$ est de $-0,84$.



Méthode. Comment calculer les dérivées partielles d'une fonction ?

Concrètement, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, on considère la variable y comme une constante et on dérive f par rapport à x à l'aide des règles de dérivation usuelles. De même pour le calcul $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$.

Exercice 2. Déterminer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f(x, y) = xy + 2x^3 + 3y^2, \quad g(x, y) = xe^{x^2+y^2}, \quad h(x, y) = x^2(1 + \ln(1 + y^2)).$$

Définition.

Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in \Omega$ tels que f possède des dérivées partielles en a .

On appelle alors *gradient* de f en a , et on note $\nabla f(a)$, le vecteur de \mathbb{R}^2 défini par :

$$\nabla(f)(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a), \frac{\partial f}{\partial y}(a) \right).$$

3.2 Fonctions de classe \mathcal{C}^1

Définition.

On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 si :

- f admet des dérivées partielles par rapport à x et à y en tout point de \mathcal{O} ;
- ses dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{cases} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : \begin{cases} \mathcal{O} & \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

sont continues sur \mathcal{O} .

On note alors $\mathcal{C}^1(\mathcal{O}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O} .

Propriété 5 (Classe \mathcal{C}^1 des fonctions polynomiales)

Les fonctions polynomiales de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

Propriété 6 (Opérations sur les fonctions de classe \mathcal{C}^1)

Soient f et g sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 . Alors :

- les fonctions λf (avec $\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$ et $f \times g$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O} ;
- si g ne s'annule pas sur \mathcal{O} , les fonctions $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O} ;
- si $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I de \mathbb{R} et que f est à valeurs dans I , alors $\varphi \circ f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O} .

Exercice 3. La fonction $N : (x, y) \mapsto \|(x, y)\|$ est-elle de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 ?

3.3 Développement limité d'ordre 1

Rappel. Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . D'après la formule de Taylor-Young d'ordre 1, elle admet un développement limité d'ordre 1 en tout réel a qui s'écrit :

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)\varepsilon(x - a) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow a} \varepsilon(x - a) = 0$$

ou encore en posant $h = x - a$:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + h\varepsilon(h) \quad \text{avec} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Localement (autour de a), on peut approcher la fonction f par la fonction affine

$$x \mapsto f(a) + f'(a)(x - a),$$

dont la courbe n'est autre que la tangente T_a à la courbe représentative de f en a .

On généralise ici ces résultats aux fonctions de deux variables :

Théorème 7 (Formule de Taylor (1685 - 1731) d'ordre 1)

Soient f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 , et a un élément de \mathcal{O} .

Notons $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}$.

Alors il existe une fonction $\varepsilon : \mathcal{B}(a, r) \rightarrow \mathbb{R}$ continue en $(0, 0)$ et vérifiant $\varepsilon(0, 0) = 0$ telle que pour tout $h = (h_1, h_2) \in \mathcal{B}(0_{\mathbb{R}^2}, r)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \underbrace{f(a) + \langle \nabla(f)(a), h \rangle}_{\text{partie principale du DL}} + \underbrace{\|h\| \cdot \varepsilon(h)}_{\text{reste du DL}} \\ &= f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot h_2 + \|h\| \varepsilon(h). \end{aligned}$$

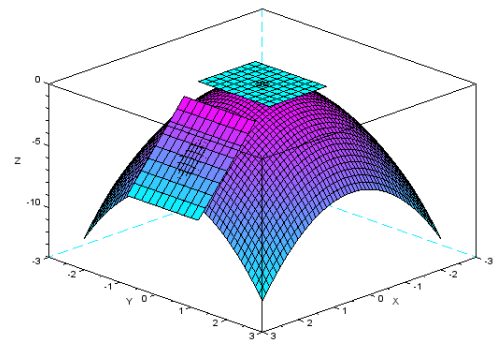
Remarque. Pour (x, y) « proche » de a , en notant $h = (x, y) - (a_1, a_2)$, alors :

$$f(x, y) \simeq f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2).$$

Donc au voisinage de a , le graphe de f « ressemble » à l'ensemble des points $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tels que

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2).$$

C'est là l'équation d'un plan de l'espace, que l'on appelle le *plan tangent au graphe f en a* .



Deux plans tangents.

Corollaire 8 (\mathcal{C}^1 implique continu)

Si f est de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} , alors f est continue sur \mathcal{O} .



Mise en garde.

- L'application norme $x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \|x\|$ montre que la réciproque est fautive : cette fonction est continue sur \mathbb{R}^2 , mais pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
- **Attention**, une fonction peut admettre des dérivées partielles par rapport à chaque variable en un point a , mais ne pas être continue en a .

3.4 Dérivée selon un vecteur

Par définition, les dérivées partielles nous donnent la dérivée des fonctions d'une variable que l'on obtient lorsqu'on se rapproche d'un point $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ parallèlement aux axes (l'axe des abscisses pour la première dérivée partielle, l'axe des ordonnées pour la seconde).

Plus généralement, que peut-on dire de la dérivabilité de $t \mapsto f((a_1, a_2) + t(u_1, u_2))$ où $u = (u_1, u_2)$ est un vecteur quelconque de \mathbb{R}^2 . C'est-à-dire lorsqu'on se rapproche de a suivant une droite non nécessairement verticale ou horizontale ?

C'est ce à quoi répond le théorème suivant, et on constate qu'il suffit de connaître les deux dérivées partielles pour répondre à cette question.

Propriété 9 (Dérivée selon un vecteur)

Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 , et soit $u = (u_1, u_2)$ un vecteur non nul de \mathbb{R}^2 .

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathcal{O}$ et soit $r > 0$ tel que $\mathcal{B}(a, r) \subset \mathcal{O}$.

Alors la fonction $g : t \mapsto f(a + tu)$ est définie sur $\left] -\frac{\|u\|}{r}, \frac{\|u\|}{r} \right[$ et elle est \mathcal{C}^1 sur cet intervalle, avec

$$g' : t \mapsto \langle \nabla f(a + tu), u \rangle.$$

En particulier,

$$g'(0) = \langle \nabla f(a), u \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(a) \cdot u_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(a) \cdot u_2.$$

La quantité $\langle \nabla f(a), u \rangle$ est appelée *dérivée de f en a selon le vecteur u* .

Remarques.

- Notons que la quantité $\langle \nabla f(a), u \rangle$ dépend de la norme du vecteur u , alors qu'on aurait envie que cette dérivée représente «la variation de f dans la direction de u ». Afin de se débarrasser de cette dépendance, on peut considérer un vecteur u unitaire.
- Pour u unitaire, on a par l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|\langle \nabla f(a), u \rangle| \leq \|\nabla f(a)\| \underbrace{\|u\|}_{=1} = \|\nabla f(a)\|.$$

Et de plus, il y a égalité si et seulement si u et $\nabla f(a)$ sont colinéaires. Autrement dit, $\langle \nabla f(a), u \rangle$ est maximal si et seulement si u est colinéaire à $\nabla f(a)$.

Ainsi, la direction de $\nabla f(a)$ indique la direction de "la plus grande pente", et son sens est celui de la montée.

3.5 Dérivée d'une composée

Donnons nous deux fonctions d'une variable $x : t \mapsto x(t)$ et $y : t \mapsto y(t)$, définies sur un intervalle I , ainsi qu'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On peut alors considérer la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$, qui est donc une fonction de I dans \mathbb{R} .

Lorsque t parcourt I , le point de coordonnées $(x(t), y(t))$ parcourt une courbe \mathcal{C} tracée dans \mathbb{R}^2 . Et donc le point de coordonnées $(x(t), y(t), g(t))$ se "promène" le long d'une courbe tracée sur le graphe de f .

Ce que dit la propriété suivante, c'est qu'alors la dérivée de g en t est égale à la dérivée de f en $(x(t), y(t))$ selon le vecteur $(x'(t), y'(t))$, qui est un vecteur directeur de la tangente à la courbe \mathcal{C} en $(x(t), y(t))$.

Propriété 10 (Dérivée d'une composée)

Soient $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 et $x, y : I \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert I de \mathbb{R} telles que : $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathcal{O}$.

Alors la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe \mathcal{C}^1 sur I et

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = \langle \nabla f(x(t), y(t)), (x'(t), y'(t)) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t).$$

Remarque. Le gradient est orthogonal aux lignes de niveau.

Considérons f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} et soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ tel que $f(x_0, y_0) = \lambda$, c'est-à-dire un point de la ligne de niveau λ de f .

On suppose qu'il existe une boule $\mathcal{B}((x_0, y_0), r) \subset \mathcal{O}$, un intervalle ouvert I contenant 0 et deux fonctions x, y de classe \mathcal{C}^1 sur I telles que :

- $(x_0, y_0) = (x(0), y(0))$;
- $\forall t \in I, (x(t), y(t)) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r)$;
- $\forall (u, v) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r), f(u, v) = \lambda \Leftrightarrow \exists t \in I, (u, v) = (x(t), y(t))$.

Autrement dit, on suppose qu'au voisinage de (x_0, y_0) , la ligne de niveau λ de f est bien "une courbe" représentée par $t \mapsto (x(t), y(t))$.

La tangente à la courbe $t \mapsto (x(t), y(t))$ en 0 a pour vecteur directeur $(x'(0), y'(0))$. Mais, avec la proposition précédente, la fonction $g : t \mapsto f(x(t), y(t))$ vérifie

$$g'(0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y'(0).$$

Puisque par ailleurs, cette fonction est constante sur I égale à λ , on obtient :

$$\langle \nabla f(x_0, y_0), (x'(0), y'(0)) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot x'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot y'(0) = 0.$$

Ainsi, le gradient de f en (x_0, y_0) est orthogonal à la ligne de niveau λ .

Propriété 11 (Règle de la chaîne)

Soit $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 , et soient φ, ψ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O}' de \mathbb{R}^2 telles que $\forall (u, v) \in \mathcal{O}', (\varphi(u, v), \psi(u, v)) \in \mathcal{O}$.

Alors la fonction $g : (u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ est \mathcal{C}^1 sur \mathcal{O}' et ses dérivées partielles sont données par

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial x}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial y}(u, v) &= \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \frac{\partial \psi}{\partial y}(u, v) \end{aligned}$$

4 Extrema d'une fonction de deux variables

4.1 Extrema locaux, extrema globaux

Définition.

Soit Ω une partie de \mathbb{R}^2 , $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction et $(x_0, y_0) \in \Omega$.

- On dit que f admet un *minimum global* en (x_0, y_0) (resp. *maximum global* en (x_0, y_0)) lorsque :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)).$$

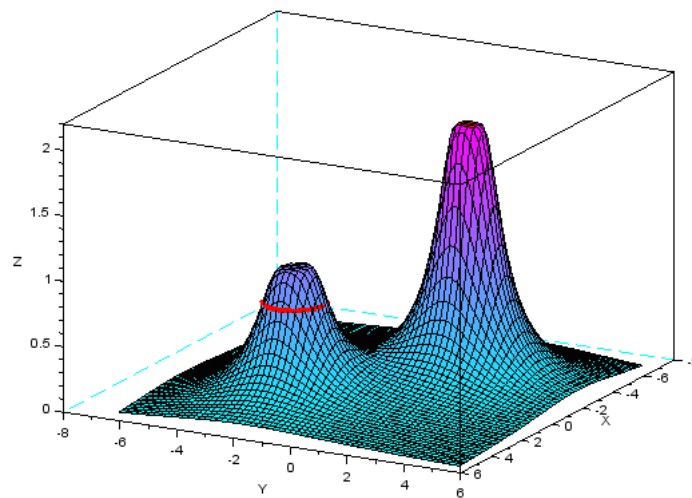
- On dit que f admet un *extremum global* en (x_0, y_0) lorsque f admet un minimum global ou un maximum global en (x_0, y_0) .
- On dit que f admet un *minimum local* en (x_0, y_0) (resp. *maximum local* en (x_0, y_0)) lorsqu'il existe $r > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad (x, y) \in \mathcal{B}((x_0, y_0), r) \Rightarrow f(x, y) \geq f(x_0, y_0) \quad (\text{resp. } f(x, y) \leq f(x_0, y_0)).$$

- On dit que f admet un *extremum local* en (x_0, y_0) lorsque f admet un minimum local ou un maximum local en (x_0, y_0) .

Remarque. Un extremum global est un extremum local. Mais la réciproque est fausse.

Exemple. Considérons la fonction f dont le graphe \mathcal{G}_f est représenté ci-dessous :



f admet un maximum global en $(-2, 2)$, et un maximum local en $(2, -2)$ (en effet, pour tout $x \in \mathcal{B}((2, -2), 1)$, c'est-à-dire graphiquement pour tout $x \in \mathbb{R}^2$ à l'intérieur du disque rouge, on a $f(x) \leq f(2, -2)$).

4.2 Condition nécessaire

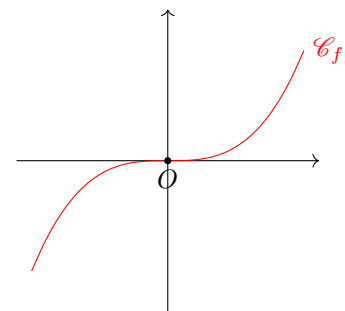
Rappel. Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$.
Alors on a :

$$f \text{ admet un extremum en } a \Rightarrow f'(a) = 0.$$



Mise en garde.

La réciproque est **fausse** : par exemple, la fonction $f : x \in \mathbb{R} \mapsto x^3$ satisfait $f'(0) = 0$, mais f n'admet pas d'extremum en 0.



Courbe représentative de $x \mapsto x^3$.

On généralise ici ces résultats aux fonctions de deux variables :

Définition.

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 .

On appelle *point critique* de f tout point $(x_0, y_0) \in \mathcal{O}$ vérifiant l'équation :

$$\nabla(f)(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$$

Théorème 12 (Condition nécessaire d'extremum local)

Soit f une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un **ouvert** \mathcal{O} de \mathbb{R}^2 .

Si f admet un extremum local en (x_0, y_0) , **alors** (x_0, y_0) est un point critique de f .



Mise en garde.

La réciproque est **fausse** : si (x_0, y_0) est un point critique de f , f n'admet pas nécessairement un extremum local en (x_0, y_0) .

Exemple. La fonction $f : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x^2 - y^2$ est polynomiale, donc de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 . Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a :

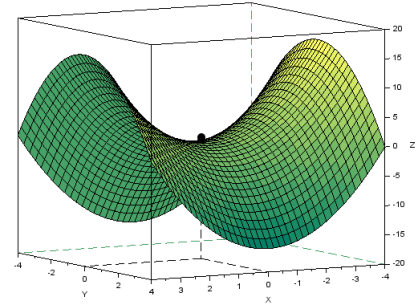
$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ -2y \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique si et seulement si :

$$\nabla f(x, y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (0, 0).$$

f a donc un unique point critique en $(0, 0)$, qui vaut $f(0, 0) = 0$. Mais 0 n'est ni un maximum, ni un minimum pour f puisque :

$$f(0, y) = -y^2 < 0 < x^2 = f(x, 0).$$



Graphe de $f : (x, y) \mapsto x^2 - y^2$.

Exercice 4. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = xe^{x(y^2+1)}.$$

1. Montrer que f admet un unique point critique sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) \geq xe^x$.
3. En étudiant la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = xe^x$, conclure quand à la nature du point critique obtenu à la question 1.