Chapitre 5

Systèmes linéaires

1 Vocabulaire **2**

2 Résolution de petits systèmes à coefficients réels **2**
- 2.1 Cas des systèmes de deux équations à deux inconnues 2
  - 2.1.1 Rappels et compléments de géométrie plane 2
  - 2.1.2 Systèmes de deux équations à deux inconnues 3
- 2.2 Cas des systèmes de deux équations à trois inconnues 4
  - 2.2.1 Rappels de géométrie dans l'espace 4
  - 2.2.2 Systèmes de deux équations à trois inconnues 4

3 Cas général **5**
- 3.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système 5
- 3.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss . 5
- 3.3 Remontée du système 7

Compétences attendues.

✓ Savoir échelonner un système à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss.

✓ Identifier inconnues principales, inconnues paramètres et rang d'un système, et effectuer la remontée du système.

✓ Interpréter géométriquement l'ensemble des solutions d'un petit système.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Vocabulaire

Dans ce chapitre, n et p sont deux éléments de $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés des scalaires.

Définition.

- On appelle *système linéaire à n équations et p inconnues* un système de la forme :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

  où les $x_j \in \mathbb{K}$ sont appelés les *inconnues* du système, les $a_{i,j} \in \mathbb{K}$ sont les *coefficients* du système, et les $b_i \in \mathbb{K}$ forment le *second membre* du système.

- Lorsque les b_i sont tous nuls, on dit que le système $(\mathscr{S})$ est *homogène*.

  Dans le cas général, on appelle *système homogène associé à* $(\mathscr{S})$ le système $(\mathscr{S}_0)$ obtenu en remplaçant le second membre $(b_1, \ldots, b_n)$ par $(0, \ldots, 0)$.

Exemple. $\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + 2y + z = -2 \end{cases}$ est un système linéaire de deux équations à trois inconnues, et le système homogène associé est $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \end{cases}$.

Définition.

- On appelle *solution du système* $(\mathscr{S})$ tout p-uplet $(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ tel que les n équations de $(\mathscr{S})$ soient vérifiées.
- Un système dont l'ensemble des solutions est vide est dit *incompatible*. Il est dit *compatible* sinon.

Remarque. Un système homogène est toujours compatible puisqu'il possède toujours $(0, \ldots, 0)$ comme solution.

2 Résolution de petits systèmes à coefficients réels

Dans cette section seulement, on supposera que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

2.1 Cas des systèmes de deux équations à deux inconnues

2.1.1 Rappels et compléments de géométrie plane

Plaçons nous dans le plan affine réel $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et notons $\overrightarrow{\mathscr{P}}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

Définition.

On considère deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ du plan, et M et N les points tels que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{v}$.
On dit que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont *colinéaires* si les trois points O, M et N sont alignés, c'est-à-dire s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{u} = \alpha\overrightarrow{v}$.

Remarque. $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si, et seulement si, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{v} = \alpha\overrightarrow{u}$.

Propriété 1

Soient $\overrightarrow{u} = a\overrightarrow{i} + b\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = c\overrightarrow{i} + d\overrightarrow{j}$ deux vecteurs du plan. Alors :

$$\overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v} \text{ sont colinéaires} \quad \Leftrightarrow \quad ad - bc = 0.$$

Définition.

On définit de manière équivalente une *droite affine* $\mathscr{D}$ du plan par la donnée :

- d'un point A et d'un vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ non nul : la droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires.
- d'un point A et d'un vecteur normal $\overrightarrow{n}$ non nul : la droite $\mathscr{D}$ passant par A et normale au vecteur $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M du plan tels que $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\overrightarrow{n}$.

Propriété 2

Soient A un point du plan, $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ deux vecteurs non nul de $\overrightarrow{\mathscr{P}}$. Notons (x_A, y_A) les coordonnées de A dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, et (α, β) les composantes de $\overrightarrow{u}$, (a, b) celles de $\overrightarrow{n}$.

- La droite $\mathscr{D}$ passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u}$ a pour équation paramétrique :

$$\exists \lambda \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{u} \quad \text{ou} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x - x_A = \lambda\alpha \\ y - y_A = \lambda\beta \end{cases}$$

  et pour équation cartésienne :

$$\beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0.$$

- Une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par A et normale à $\overrightarrow{n}$ est :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{ou} \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0.$$

Exercice 1. Donner l'équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ passant par $A(1, -1)$ et dirigée par $\overrightarrow{u} = 2\overrightarrow{i} - 3\overrightarrow{j}$ et de la droite $\mathscr{D}'$ passant par $B(0, 2)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n} = -\overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$.

Propriété 3

Les droites affines $\mathscr{D}$ sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme suivante avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, $(a, b) \neq (0, 0)$:

$$ax + by = c.$$

Le vecteur de composantes (a, b) est normal à la droite $\mathscr{D}$ et le vecteur $(-b, a)$ dirige $\mathscr{D}$.

Exercice 2. Identifier l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) satisfaisant $2x - 3y = 4$.

2.1.2 Systèmes de deux équations à deux inconnues

On s'intéresse au système suivant de deux équations à deux inconnues (où (a, b) et (c, d) sont non nuls) :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} .$$

L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est géométriquement l'intersection de deux droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$, c'est-à-dire :

- l'ensemble vide si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles et non confondues : le système n'a pas de solution ;
- une droite si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues : le système a une infinité de solutions ;
- un point si $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ne sont pas parallèles : le système possède une unique solution.

Propriété 4

Le système

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases}$$

admet une unique solution si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$.

Vocabulaire. La quantité $ad - bc$ est appelée *déterminant du système* $(\mathscr{S})$, et notée $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$, et sera largement généralisée plus tard dans l'année.

Exercice 3. Montrer que la système $\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$ admet une unique solution et la déterminer.

2.2 Cas des systèmes de deux équations à trois inconnues

2.2.1 Rappels de géométrie dans l'espace

Le même travail peut être effectué avec les plans de l'espace, lequel est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.

Définition.

Le *plan affine* $\mathscr{P}$ de l'espace passant par A et normal au vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Propriété 5

Soient A un point de l'espace et $\overrightarrow{n}$ un vecteur non nul. Notons (x_A, y_A, z_A) les coordonnées de A et (a, b, c) les composantes de $\overrightarrow{n}$.
Le plan $\mathscr{P}$ de l'espace passant par A et normal au vecteur non nul $\overrightarrow{n}$ a pour équation cartésienne :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n} = 0 \quad \text{ou} \quad a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0.$$

Propriété 6

Les plans affines $\mathscr{P}$ de l'espace sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme suivante avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$:

$$ax + by + cz = d.$$

Le vecteur de composantes (a, b, c) est normal à $\mathscr{P}$.

2.2.2 Systèmes de deux équations à trois inconnues

Intéressons nous à présent à l'étude d'un système linéaire de deux équations à trois inconnues :

$$(\mathscr{S}) \ : \ \begin{cases} ax + by + cz = d \\ a'x + b'y + c'z = d' \end{cases}$$

où $(a,b,c)\neq(0,0,0)$ et $(a',b',c')\neq(0,0,0)$. L'ensemble des solutions de $(\mathscr{S})$ est géométriquement l'intersection de deux plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$, c'est-à-dire :

- l'ensemble vide si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ sont parallèles sans être confondus : le système n'a pas de solution ;
- un plan si $\mathscr{P}=\mathscr{P}'$: le système possède une infinité de solutions ;
- une droite si $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles : le système a une infinité de solutions.

Si on ajoute une troisième équation $a''x+b''y+c''z=d''$ au système, une nouvelle possibilité apparaît, celle d'un point, intersection de trois plans en position générale.

3 Cas général

3.1 Opérations élémentaires sur les lignes d'un système

Définition.

On dit que deux systèmes $(\mathscr{S}_1)$ et $(\mathscr{S}_2)$ à p inconnues sont *équivalents* s'ils possèdent le même ensemble de solutions.

Pour modifier un système en un système équivalent, nous disposons des opérations suivantes.

Définition.

On appelle *opération élémentaire* sur les lignes d'un système l'une des trois opérations suivantes :

- échange des lignes L_i et L_j avec $i\neq j$, qu'on notera $L_i\leftrightarrow L_j$;
- multiplication d'une ligne L_i par un scalaire α non nul, qu'on notera $L_i\leftarrow\alpha\cdot L_i$;
- ajout de $\beta\cdot L_j$ à L_i avec $i\neq j$, qu'on notera $L_i\leftarrow L_i+\beta\cdot L_j$ où $\beta\in\mathbb{K}$.

Exemple. Dans le système $\left\{\begin{array}{l}-x+3y+2z=2\\ 3x-2y+5z=4\end{array}\right.$, le résultat de $L_2\leftarrow L_2+3L_1$ est $\left\{\begin{array}{l}-x+3y+2z=2\\ 7y+11z=10\end{array}\right.$.

Propriété 7

Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.

Rédaction.

On **précisera systématiquement** et à chaque étape les opérations élémentaires qu'on effectue pour passer d'un système linéaire à un autre. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{l}-x+3y+2z=2\\ 3x-2y+5z=4\end{array}\right. \underset{L_2\leftarrow L_2+3L_1}{\Leftrightarrow} \left\{\begin{array}{l}-x+3y+2z=2\\ 7y+11z=10\end{array}\right.$$

Remarque. On pourra directement faire l'opération $L_i\leftarrow\alpha\cdot L_i+\beta\cdot L_j$ (avec $\alpha\neq0$), qui est obtenue en faisant successivement $L_i\leftarrow\alpha\cdot L_i$ puis $L_i\leftarrow L_i+\beta\cdot L_j$ et qui transforme donc un système en un système équivalent.

3.2 Échelonnement et algorithme du pivot de Gauss

Considérons le système $(\mathscr{S})$ suivant à n équations et p inconnues :

$$(\mathscr{S}):\left\{\begin{array}{ccc}a_{1,1}x_1+\cdots+a_{1,p}x_p&=&b_1\\ a_{2,1}x_1+\cdots+a_{2,p}x_p&=&b_2\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n,1}x_1+\cdots+a_{n,p}x_p&=&b_n\end{array}\right.$$

Grâce à des opérations élémentaires sur les lignes du système $(\mathscr{S})$, on va se ramener à un système $(\mathscr{S}')$ plus simple à résoudre. On utilise pour cela l'*algorithme du pivot de Gauss* suivant :

- **Étape 1 : détermination du premier pivot.**

  On s'intéresse aux coefficients $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}$ devant l'inconnue x_1.

  – Si l'un des $a_{i,1}$ est non nul, on le positionne en première ligne par l'opération $L_i \leftrightarrow L_1$. On se ramène ainsi au cas $p_1 = a_{1,1} \neq 0$.

  – Si tous les $a_{1,1}, \dots, a_{n,1}$ sont nuls, on cherchera un coefficient non nul devant x_2, puis à défaut devant x_3, jusqu'à x_n. On est alors ramené au cas précédent quitte à renuméroter les inconnues.

- **Étape 2 : annulation des coefficients sous le premier pivot.**

  Par des opérations du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_1$ avec α bien choisi, on annule les coefficients devant x_1 dans les équations d'indices allant de 2 à n.

  Par équivalences, on a alors transformé le système étudié en un système de la forme :

$$\begin{cases} p_1 x_1 + a'_{1,2} x_2 + \cdots + a'_{1,p} x_p = b'_1 \\ \qquad\quad a'_{2,2} x_2 + \cdots + a'_{2,p} x_p = b'_2 \\ \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\quad a'_{n,2} x_2 + \cdots + a'_{n,p} x_p = b'_n \end{cases}$$

- **Reprise des étapes 1 et 2 :**

  On reprend les étapes précédentes en opérant avec les équations allant de 2 à n pour déterminer un deuxième pivot, puis les équations 3 à n, etc.

À la suite de cet algorithme, et après avoir éventuellement renommé les inconnues, on parvient à un système *échelonné par lignes*, de la forme :

$$\begin{cases} p_1 x_1 + \cdots + a''_{1,r} x_r + a''_{1,r+1} x_{r+1} + \cdots + a''_{1,p} x_p = b''_1 \\ \quad \ddots \qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \qquad\qquad p_r x_r + a''_{r,r+1} x_{r+1} + \cdots + a''_{r,p} x_p = b''_r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b''_{r+1} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b''_n \end{cases}$$

On a ainsi montré le résultat suivant :

Théorème 8 (*Pivot de Gauss*)

Tout système linéaire est équivalent à un système échelonné par lignes.

Définition.

- Les nombres $p_1, \dots, p_r$ sont appelés *pivots*. Le nombre r de pivots est appelé le *rang du système*.
- On appelle *inconnue principale* toute inconnue associée à un pivot. Toute autre inconnue est appelée *inconnue secondaire* ou *inconnue paramètre*.
- Les r premières équations sont les *équations principales* et les suivantes sont les *équations de compatibilité*.

Remarque. On montrera dans un prochain chapitre que le rang r du système est unique et ne dépend pas des opérations élémentaires effectuées, ce qui justifie la définition précédente.

Le saviez-vous ?

Cette méthode porte le nom du mathématicien allemand Carl Friedrich Gauss. Elle lui est pourtant bien antérieure, puisqu'elle était connue des mathématiciens chinois depuis au moins le 1er siècle de notre ère. Sa paternité reviendrait même à un certain Chang Ts'ang, chancelier de l'empereur de Chine au 2-ème siècle avant notre ère.

En Europe, cette méthode fut découverte et présentée bien plus tard, en 1810, par Carl Friedrich Gauss dans un livre étudiant le mouvement d'un astéroïde. On lui associe aujourd'hui son nom.

Carl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

3.3 Remontée du système

Terminons la résolution du système $(\mathscr{S})$. Si l'une des équations de compatibilité est fausse, le système est incompatible : il n'a pas de solution. Sinon, on effectue la *remontée* du système comme suit :

- on annule tous les coefficients situés au-dessus strictement des pivots. La méthode est la même que précédemment, on utilise les pivots et des opérations $L_i \leftarrow L_i + \alpha \cdot L_j$ pour aboutir à un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} p_1x_1 + & 0 & + \cdots + & 0 & + a'''_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'''_{1,p}x_p & = & b'''_1 \\ & p_2x_2 & + \cdots + & 0 & + a'''_{2,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'''_{2,p}x_p & = & b'''_2 \\ & & \ddots & & \vdots \qquad \vdots & & \vdots \\ & & & p_rx_r & + a''_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a''_{r,p}x_p & = & b''_r \end{array}\right.$$

- on exprime les inconnues principales en fonction des inconnues paramètres et du second membre :

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = \dfrac{1}{p_1}\left(b'''_1 - a'''_{1,r+1}x_{r+1} + \cdots + a'''_{1,p}x_p\right) \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ x_r = \dfrac{1}{p_r}\left(b''_r - (a''_{r,r+1}x_{r+1} + \cdots + a''_{r,p}x_p)\right) \end{array}\right.$$

- on écrit l'ensemble des solutions sous forme « paramétrique », c'est-à-dire en fonction des inconnues paramètres (les inconnues principales ne doivent alors plus apparaître).

Exercice 4. Résoudre les systèmes suivants et décrire géométriquement l'ensemble des solutions :

$$(\mathscr{S}_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x - 2y + z & = & 1 \\ -y + z & = & 3 \\ 2x + y + z & = & 0 \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_2) : \left\{\begin{array}{rcl} -2x + y - z & = & 1 \\ x + y + 2z & = & 0 \\ 3x - 2y + z & = & 4 \end{array}\right. \qquad (\mathscr{S}_3) : \left\{\begin{array}{rcl} -x + y + z & = & 1 \\ 2x + y + 2z & = & 0 \\ x + 2y + 3z & = & 1 \end{array}\right.$$

Mise en garde.

Vous pourriez être tenté de vous écarter de la méthode du pivot en pensant à d'autres opérations élémentaires qui vous sembleraient plus « intéressantes ». L'expérience montre que ce n'est jamais une réussite. Le plus efficace est de suivre strictement chaque étape du pivot de Gauss.

Lors de la remontée, nous avons obtenu les résultats suivants.

Propriété 9

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et p inconnues de rang r. On suppose que $(\mathscr{S})$ est compatible. Alors :

- si $r = p$ (rang = nombre d'inconnues), le système possède une unique solution :
- si $r < p$, le système possède une infinité de solutions (paramétrées à l'aide des $p - r$ inconnues secondaires).

Propriété 10

Soit $(\mathscr{S})$ un système linéaire à n équations et n inconnues.
Si $(\mathscr{S})$ est de rang n, alors il admet une unique solution. Un tel système est dit de *Cramer*.

Exemple. Le système à 3 équations et 3 inconnues suivant

$$\left\{\begin{array}{rcl} x+y-z & = & 0 \\ y+2z & = & 0 \\ 3z & = & 0 \end{array}\right.$$

est échelonné par lignes, et compte 3 pivots. Il est donc de rang 3 : c'est un système de Cramer. Par conséquent, il possède une unique solution, qui est $(0,0,0)$ puisque le système est homogène.