

Nombres complexes

1	Ensemble des nombres complexes	2
1.1	Définitions	2
1.2	Le plan complexe	3
1.3	Conjugué d'un nombre complexe	4
1.4	Module d'un nombre complexe	4
2	Nombres complexes de module 1	6
2.1	Nombres complexes de module 1	6
2.2	Notation exponentielle imaginaire	6
2.3	Applications à la trigonométrie	7
3	Forme trigonométrique	8
3.1	Forme trigonométrique d'un complexe	8
3.2	Exponentielle complexe	10
4	Équations algébriques dans $\mathbb{C}$	10
4.1	Racines carrées d'un nombre complexe	10
4.2	Équation du second degré	11
5	Racines n-èmes d'un nombre complexe	12
5.1	Racines n -èmes de l'unité	12
5.2	Racines n -èmes d'un complexe	13
6	Nombres complexes et géométrie plane	13
6.1	Alignement et orthogonalité	13
6.2	Transformations remarquables du plan	14
6.3	Similitudes directes	15
7	Fonctions à valeurs complexes	17

Compétences attendues.

- ✓ Manipuler les nombres complexes (conjugué, module, forme algébrique, forme trigonométrique, ...).
- ✓ Appliquer les nombres complexes à la trigonométrie (linéarisation, factorisation, ...).
- ✓ Déterminer les racines carrées d'un complexe, résoudre les équations algébriques de degré 2.
- ✓ Manipuler les racines n -èmes de l'unité, déterminer les racines n -èmes d'un complexe.
- ✓ Résoudre des problèmes de géométrie plane par les complexes, identifier une similitude directe.

1 Ensemble des nombres complexes

1.1 Définitions

La construction de $\mathbb{C}$ étant hors programme, on admet le résultat suivant.

Théorème 1

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ dont les éléments sont appelés les *nombres complexes*, contenant $\mathbb{R}$ et muni de deux opérations d'addition $+$ et de multiplication $\times$ qui satisfont les assertions suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément i pour lequel $i^2 = -1$.
- Tout nombre complexe z peut être écrit d'une et une seule manière sous *forme algébrique* $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
- La somme et le produit de deux réels « au sens de $\mathbb{C}$ » coïncident avec leur somme et leur produit au sens usuel.
- Les opérations $+$ et $\times$ de $\mathbb{C}$ sont soumises aux mêmes règles de calcul que leurs analogues dans $\mathbb{R}$.

Remarques.

- Si $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ sont deux éléments de $\mathbb{C}$, alors :

$$(a + ib) + (a' + ib') = (a + a') + i(b + b')$$

et

$$(a + ib) \times (a' + ib') = aa' + iab' + iba' + i^2bb' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b).$$

- L'unicité de l'écriture sous forme algébrique signifie que : $a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$.



Danger.

Il n'existe pas de relation d'ordre sur $\mathbb{C}$ qui « prolonge » celle sur $\mathbb{R}$ et compatible avec les opérations d'addition et de multiplication. En effet, si une telle relation d'ordre existait, on aurait $1 \geq -1$, et :

- si $i \geq 0$, alors $i \geq -i$, et en multipliant par i , $i^2 \geq -i^2$, soit $-1 \geq 1$ d'où une contradiction ;
- si $i \leq 0$, alors $-i \geq i$, et donc $-i^2 \leq i^2$, soit $1 \leq -1$, d'où une contradiction de nouveau.

Définition.

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$. On appelle :

- a sa *partie réelle*, qu'on notera $\Re(z)$;
- b sa *partie imaginaire* qu'on notera $\Im(z)$.

Si $b = 0$, $z = a$ est un réel. Si $a = 0$, on dira que $z = ib$ est *imaginaire pur*. On notera $i\mathbb{R}$ l'ensemble des imaginaires purs, c'est-à-dire l'ensemble $\{ib, b \in \mathbb{R}\}$.

Remarques.

- Un complexe z est un réel si, et seulement si, $\Im(z) = 0$, ce qui équivaut encore à $z = \Re(z)$.
 z est un imaginaire pur si, et seulement si, $\Re(z) = 0$, ce qui équivaut à $z = \Im(z)i$.
- Si z et z' sont deux nombres complexes, alors :

$$\Re(z + z') = \Re(z) + \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z + z') = \Im(z) + \Im(z').$$

**Danger.**

Attention cependant :

$$\Re(z \times z') \neq \Re(z) \times \Re(z') \quad \text{et} \quad \Im(z \times z') \neq \Im(z) \times \Im(z').$$

En effet, le calcul explicite de $z \times z'$ effectué plus haut montre que :

$$\Re(z \times z') = \Re(z)\Re(z') - \Im(z)\Im(z') \quad \text{et} \quad \Im(z \times z') = \Re(z)\Im(z') + \Im(z)\Re(z').$$

Propriété 2

- (1) Tout nombre complexe non nul z possède un inverse pour $\times$. Celui-ci est unique, noté z^{-1} .
- (2) Si z et z' sont deux complexes, alors : $z \times z' = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z' = 0$.

Remarque. Ceci nous permet également de définir la division de deux complexes z et z' en posant, pour $z' \neq 0$, $\frac{z}{z'} = z \times (z')^{-1}$.

Exercice 1. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$. Montrer que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

**Le saviez-vous ?**

Les nombres complexes sont apparus en Italie au 16^{ème} siècle. Nicolas Tartaglia le premier résout des équations du troisième degré. Il révèle sa formule à Jérôme Cardan qui la publie en 1545 dans son ouvrage *Ars Magna*. Cependant, certaines racines réelles échappaient à cette formule. En 1560, Rafaele Bombelli s'aperçoit qu'on les retrouve si l'on conserve des racines de nombres négatifs qui se simplifient en fin de calcul. Cela le conduit à introduire les nombres complexes dont il donne explicitement les règles de calculs.

Cependant, ces nouveaux nombres, nommés imaginaires par René Descartes en 1637, peinent à se faire admettre. Leonhard Euler les utilise abondamment et ose en 1749 cette définition : « on nomme quantité imaginaire celle qui n'est ni plus grande que zéro, ni plus petite que zéro, ni plus égale à zéro ; ce sera quelque chose d'impossible comme $\sqrt{-1}$ ». Il introduit la notation i en 1777 pour remplacer $\sqrt{-1}$.

Au début du siècle suivant, Carl Friedrich Gauss donne une construction effective de ces nombres et précise les opérations d'addition et de multiplication. On les dénomme alors nombres complexes, c'est-à-dire composés de deux nombres, les parties réelles et imaginaires.

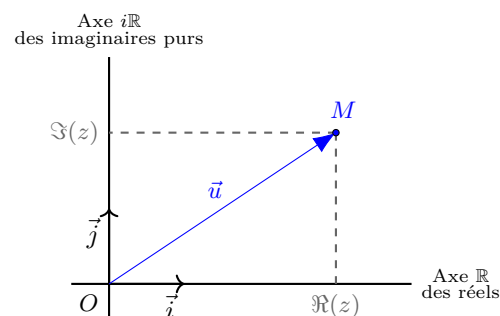
1.2 Le plan complexe

De même qu'on représente $\mathbb{R}$ comme une droite - la droite réelle - on représente $\mathbb{C}$ comme un plan qu'on appelle le plan complexe.

Définition.

Étant donné un plan quelconque muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on identifie tout nombre complexe z au point M de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On dit que M est l'*image* de z et que z est l'*affiche* de M .

De même, on peut aussi identifier z au vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(\Re(z), \Im(z))$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Exemple. $\vec{i}$ est l'image du nombre complexe 1, et $\vec{j}$ est le vecteur d'affixe i .

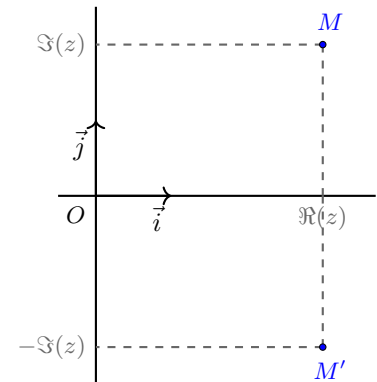
Remarques.

- Cette représentation plane de $\mathbb{C}$ identifie $\mathbb{R}$ à l'axe des abscisses dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et $i\mathbb{R}$ à l'axe des ordonnées.
- Les règles usuelles de calcul sur les coordonnées dans un repère se transmettent aux nombres complexes :
 - pour tous points A et B du plan d'affixes respectifs a et b , le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $b - a$;
 - pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan d'affixes respectifs z et z' et pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, le vecteur $\lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ a pour affixe $\lambda z + \mu z'$.

1.3 Conjugué d'un nombre complexe**Définition.**

On appelle *conjugué* d'un nombre complexe z le nombre complexe :

$$\bar{z} = \Re(z) - i\Im(z).$$



Remarque. Dans le plan complexe, les points images M et M' de z et $\bar{z}$ sont donc symétriques par rapport à l'axe (Ox) .

Propriété 3

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(1) \Re(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad (2) \Im(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}; \quad (3) z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z; \quad (4) z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z.$$

Propriété 4

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(1) \bar{\bar{z}} = z; \quad (2) \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'; \quad (3) \overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'.$$

De plus, si $z \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$ et plus généralement $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\bar{z}'}{\bar{z}}.$

Exercice 2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a^2 + b^2 = 1$.

1. Montrer que $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
2. En déduire que si $z \neq 1$, alors $\frac{1+z}{1-z} \in i\mathbb{R}$.

1.4 Module d'un nombre complexe**Définition.**

On appelle *module* d'un nombre complexe z le nombre réel positif ou nul :

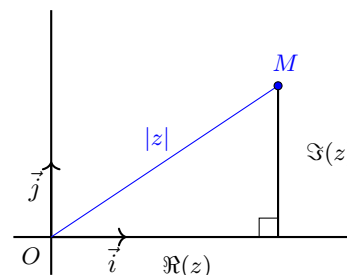
$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2 + \Im(z)^2}.$$

Remarques.

- Géométriquement, $|z|$ n'est autre que la longueur du segment joignant l'origine O au point M d'affixe z .

Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ d'images A et B , $|a - b|$ est la distance AB . Il en découle que pour tout $r > 0$:

- l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant $|z - a| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r ;
- l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant $|z - a| \leq r$ est le disque fermé de centre A et de rayon r ;
- l'ensemble des points M d'affixe z satisfaisant $|z - a| < r$ est le disque ouvert de centre A et de rayon r .



- Si z est réel, alors :

$$|z| = \sqrt{\Re(z)^2} = \sqrt{z^2}$$

est égal à la valeur absolue de z . Ainsi, le module prolonge naturellement la notation de valeur absolue.

Propriété 5

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(1) \quad z\bar{z} = |z|^2 ;$$

$$(2) \quad \text{si } z \neq 0, \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}.$$

Propriété 6

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

$$(1) \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 ;$$

$$(3) \quad |\bar{z}| = |z| ;$$

$$(2) \quad |\Re(z)| \leq |z| \quad \text{et} \quad |\Im(z)| \leq |z| ;$$

$$(4) \quad |zz'| = |z||z'|, \text{ et si } z' \neq 0, \quad \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Propriété 7 (Inégalités triangulaires)

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:

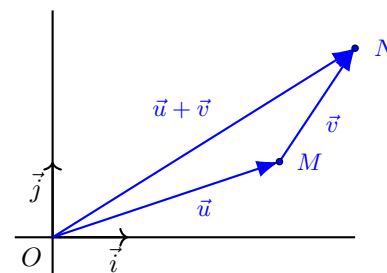
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Et on a l'égalité $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ si, et seulement si, $z_2 = 0$ ou s'il existe $\alpha \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_1 = \alpha z_2$.

Remarque. L'inégalité triangulaire peut s'interpréter géométriquement de la manière suivante : si z et z' représentent les affixes de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors on a l'inégalité des normes de vecteurs :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|.$$

Le cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire correspond au cas où les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires de même sens. C'est le cas si, et seulement si, les points O , M et N d'affixes respectifs 0 , z et z' sont alignés sur une même demi-droite d'origine O .



Corollaire 8

Si $z_1, \dots, z_n$ sont des complexes, alors :

$$\left| \sum_{i=1}^n z_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |z_i|.$$

Si on suppose de plus que $z_1 \neq 0$, alors cette inégalité est une égalité si, et seulement si, pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, il existe $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ tel que $z_j = \alpha_j z_1$.

2 Nombres complexes de module 1 et trigonométrie

2.1 Groupe des nombres complexes de module 1

Définition.

On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}.$$

Autrement dit, $\mathbb{U}$ est l'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique.

Remarque. Si z est un complexe non nul, alors $\frac{z}{|z|} \in \mathbb{U}$.

Propriété 9

$1 \in \mathbb{U}$ et pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{U}$, $z_1 z_2 \in \mathbb{U}$ et $\frac{1}{z_1} \in \mathbb{U}$.

Propriété 10

Si $z \in \mathbb{C}$ est non nul, alors : $z \in \mathbb{U} \Leftrightarrow \frac{1}{z} = \bar{z}$.

2.2 Notation exponentielle imaginaire

Propriété 11

Soit $z \in \mathbb{U}$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que : $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$.

Un tel réel θ est appelé **un argument** de z .

**Mise en garde.**

Il existe une infinité de tels réels θ . On veillera donc bien à dire **un** argument, et pas l'argument.

Remarque. Le réel θ est unique si on impose $\theta \in [0, 2\pi[$ ou $\theta \in [-\pi, \pi[$.

Définition.

Pour θ un réel, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe défini par :

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

Notation.

Pour le moment, il ne s'agit que d'une notation, et a priori, rien ne justifie qu'il existe un quelconque rapport avec la fonction exponentielle que nous utilisons en analyse.

En fait, il y a bien un lien, et il existe une formule (que nous verrons en fin d'année) qui permet de définir de la même manière e^x pour $x \in \mathbb{R}$ et $e^{i\theta}$ pour $\theta \in \mathbb{R}$.

Remarque. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta}$ appartient à $\mathbb{U}$. Et réciproquement, nous venons d'établir que tout nombre complexe de module 1 peut s'écrire $e^{i\theta}$ pour un certain $\theta \in \mathbb{R}$. Ainsi, $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}\}$.

Graphiquement, le point M d'affixe $e^{i\theta}$ est le point du cercle trigonométrique tel qu'une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ soit θ .

Exemples. On a $e^{i0} = 1$ et plus généralement $e^{2ik\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Notons également que $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$, et $e^{i\pi} = -1$.

Propriété 12

- | | |
|--|---|
| (1) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; | (3) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, e^{i\theta} e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; |
| (2) $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$; | (4) $\forall (\theta, \theta') \in \mathbb{R}^2, (e^{i\theta} = e^{i\theta'} \Leftrightarrow \theta \equiv \theta' [2\pi])$. |

Propriété 13 (Formules d'Euler)

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

Propriété 14 (Formule de Moivre)

Pour tous $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$:

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad \text{ce qui se récrit :} \quad (\cos(\theta) + i \sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta).$$

2.3 Applications à la trigonométrie

2.3.1 Linéarisation des puissances de cosinus et sinus



Méthode. Comment linéariser une expression trigonométrique $\cos^k(x) \sin^\ell(x)$?

Pour linéariser une expression trigonométrique $\cos^k(x) \sin^\ell(x)$ (c'est-à-dire l'écrire comme une combinaison linéaire de termes en $\cos(rx)$ ou $\sin(sx)$ avec $r, s \in \mathbb{N}$), on procède comme suit :

- (i) on utilise les formules d'Euler pour exprimer $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} ;
- (ii) on développe complètement à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
- (iii) on regroupe les termes deux à deux conjugués pour reconnaître des $\cos(rx)$ ou $\sin(sx)$.

Exercice 3. Linéariser $\cos^5(x)$ et $\cos^2(x) \sin^3(x)$.

2.3.2 Factorisation par l'angle de l'arc moitié



Méthode. Comment factoriser une expression du type $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$?

Pour factoriser une expression du type $e^{i\theta} \pm e^{i\theta'}$, on pensera à factoriser par l'angle moitié $e^{i\frac{\theta+\theta'}{2}}$, et à utiliser ensuite les formules d'Euler.

Exercice 4. Factoriser les expressions suivantes, où $t, p, q \in \mathbb{R}$:

- $1 + e^{it}$;
- $\cos(p) + \cos(q)$;
- $\sin(p) - \sin(q)$.

2.3.3 Calculs de sommes de cosinus et sinus



Méthode. Comment calculer une somme de cosinus ou de sinus ?

Le calcul de sommes faisant intervenir des cosinus ou des sinus peut être difficile si elles sont prises séparément. L'utilisation des complexes, en particulier de la forme exponentielle imaginaire $e^{i\theta}$ permet bien souvent d'en simplifier les calculs. Il suffira à la fin du calcul d'identifier parties réelles et imaginaires.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$. Calculer les sommes $\sum_{k=0}^n \cos(kt)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kt)$.

2.3.4 Polynômes de Tchebichev



Méthode. Comment exprimer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en fonction de $\cos(x)$ ou $\sin(x)$?

Pour transformer $\cos(nx)$ ou $\sin(nx)$ en un polynôme en $\cos$ ou en $\sin$, on procède comme suit :

- (i) on écrit $\cos(nx) = \Re((e^{ix})^n) = \Re((\cos x + i \sin x)^n)$ grâce à la formule de Moivre ;
- (ii) on développe à l'aide de la formule du binôme de Newton ;
- (iii) on ne garde que la partie réelle (ou imaginaire dans le cas d'un sinus).

Exercice 6. Exprimer $\cos(6x)$ en fonction de $\cos(x)$.

3 Forme trigonométrique et exponentielle complexe

3.1 Forme trigonométrique d'un complexe, argument(s)

Propriété 15 (Forme polaire ou trigonométrique)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors il existe $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ tel que :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) = re^{i\theta}.$$

De plus, $r = |z|$ et θ est unique modulo 2π .

Remarques.

- Soient $z_1, z_2 \in \mathbb{C}^*$, $(r_1, r_2) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ et $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$. Alors :

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 \equiv \theta_2 [2\pi] \end{cases}.$$

- L'écriture $z = re^{i\theta}$, avec $r \in \mathbb{R}_+^*$, est appelée *forme trigonométrique* ou *forme exponentielle* de z . Elle correspond à repérer le point M d'affixe z en se donnant la distance de M et une mesure d'un angle, soit repérer M à l'aide de ses coordonnées polaires.



Mise en garde.

Les réels et imaginaires purs ont des formes trigonométriques plus piégeuses qu'il n'y paraît :

- pour $x \in \mathbb{R}^*$, $x = \begin{cases} xe^{i0} & \text{si } x > 0 \\ (-x)e^{i\pi} & \text{si } x < 0 \end{cases}$;
- pour $y \in \mathbb{R}^*$, $iy = \begin{cases} ye^{\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y > 0 \\ (-y)e^{-\frac{i\pi}{2}} & \text{si } y < 0 \end{cases}$.

Définition.

Soit $z \in \mathbb{C}^*$.

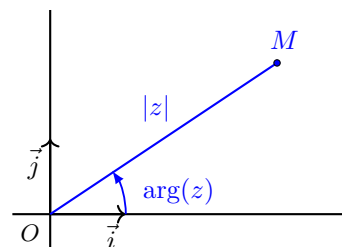
- On appelle *argument* de z tout réel θ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.

Si z possède θ comme argument, alors les arguments de z sont exactement les éléments de $\theta + 2\pi\mathbb{Z} = \{\theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

- z possède un unique argument dans $] -\pi, \pi]$, qu'on appelle *argument principal* de z , et qu'on note $\arg(z)$.

Remarques.

- Si M est le point d'affixe $z \neq 0$, alors $\arg(z)$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{OM})$.
- De même, si $\vec{u}$ a pour affixe $z = re^{i\theta}$, alors $r = \|\vec{u}\|$ et θ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{i}, \vec{u})$.



Propriété 16

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Alors :

$$(1) \quad z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad (2) \quad z \in \mathbb{R}_+ \Leftrightarrow \arg(z) = 0 \quad (3) \quad z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}.$$

Exercice 7. Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

- $z = 1 + i$;
- $z = 2 - 3i$;
- $z = 1 - e^{i\theta}$ ($\theta \in]0, 2\pi[$).

Propriété 17

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors :

$$\begin{aligned} (1) \quad \arg(zz') &\equiv \arg(z) + \arg(z') \pmod{2\pi} ; & (4) \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) &\equiv \arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) \pmod{2\pi} ; \\ (2) \quad \arg(-z) &\equiv \pi + \arg(z) \pmod{2\pi} ; & (5) \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) &\equiv \arg(z) - \arg(z') \pmod{2\pi} . \\ (3) \quad \arg(z^n) &\equiv n \arg(z) \pmod{2\pi} ; \end{aligned}$$

Exercice 8. Calculer $(1 + i)^{1515}$.

3.2 Exponentielle complexe

Définition.

Soit $z = a + ib$. On définit l'*exponentielle complexe* par :

$$e^z = e^a e^{ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b)).$$

Remarque. Notons que dans cette définition, e^a désigne l'exponentielle du nombre réel a , c'est-à-dire celle que nous avons (re)défini au Chapitre 6, alors que e^{ib} désigne le nombre complexe $\cos(b) + i \sin(b)$.

Propriété 18

Soient $z, z' \in \mathbb{C}$. Alors :

- | | |
|--|--|
| <p>(1) $\begin{cases} e^z = e^{\Re(z)} \\ \Im(z) \text{ est un argument de } e^z \end{cases} ;$</p> <p>(2) $e^z = e^{z'} \Leftrightarrow z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z} ;$</p> | <p>(3) L'application $z \mapsto e^z$ est $(2i\pi)$-périodique ;</p> <p>(4) $e^{z+z'} = e^z \times e^{z'} ;$</p> <p>(5) $\frac{1}{e^z} = e^{-z}.$</p> |
|--|--|

Exercice 9. Résoudre l'équation $e^z = 2 - 3i$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

4 Équations algébriques dans $\mathbb{C}$

4.1 Racines carrées d'un nombre complexe

Définition.

Soit $z \in \mathbb{C}$. On appelle *racine carrée* de z tout nombre complexe u vérifiant $u^2 = z$.

Exemples.

- i et $-i$ sont des racines carrées de -1 .
- Puisque $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une racine carrée de i . Et il en est de même de $-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Propriété 19

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées opposées.



Danger.

Lorsque z appartient à $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, on parlera d'**une** racine carrée de z , et non de **la** racine carrée de z , aucune de ses deux racines carrées n'ayant une raison d'être privilégiée par rapport à l'autre.

Ainsi, les notations $\sqrt{z}$ ou $z^{\frac{1}{2}}$ n'ont pas de sens pour un complexe z , et sont à réserver strictement au cas où z est un réel positif.

Remarque. La démonstration de la propriété précédente nous donne un moyen d'obtenir les racines carrées d'un nombre complexe non nul... à condition de disposer de sa forme trigonométrique, ce qui n'est pas toujours le cas. Si on ne dispose que de la forme algébrique, on pourra procéder comme suit.



Méthode. Comment obtenir les racines carrées d'un complexe sous forme algébrique ?

Pour déterminer les racines carrées $u = x + iy$ de $z = a + ib$, on part de l'égalité $u^2 = z$ qui donne :

- par égalité des parties réelles : $x^2 - y^2 = a$;
- par égalité des parties imaginaires : $2xy = b$;
- par égalité des modules : $x^2 + y^2 = |z|$.

La première et la dernière équations permettent d'obtenir x^2 et y^2 , ce qui donne quatre couples (x, y) possibles. La deuxième équation donne le signe de xy , ce qui permet d'exclure deux couples. Les deux couples restants donnent donc les racines carrées de z .

Exercice 10. Déterminer les racines carrées de $-8 + 6i$.

4.2 Équation du second degré à coefficients complexes

Propriété 20 (Résolution de l'équation du second degré)

Soit $az^2 + bz + c = 0$ une équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ à coefficients complexes $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$. Notons $\Delta = b^2 - 4ac$, appelé le *discriminant de l'équation*, et δ une racine carrée de Δ .

- Si $\Delta = 0$, l'équation possède une unique solution $-\frac{b}{2a}$, appelée racine double, et on dispose de la factorisation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2.$$

- Si $\Delta \neq 0$, l'équation possède deux solutions $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, et on dispose de la factorisation suivante :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Remarque. Dans le cas particulier où $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $\Delta < 0$, on peut prendre $\delta = i\sqrt{-\Delta}$, et les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$ sont

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

On remarquera alors que ces deux solutions sont conjuguées.

Exercice 11. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

- $z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0$;
- $z^2 - 2\cos(\theta)z + 1 = 0$ où $\theta \in \mathbb{R}$.

Propriété 21 (Relations coefficients-racines)

Soient $a, b, c \in \mathbb{C}$ avec $a \neq 0$, et $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Alors :

$$z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les solutions de l'équation } az^2 + bz + c = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}.$$



Méthode. Comment résoudre un système somme-produit ?

Pour résoudre un système $\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, on introduit l'équation $z^2 - sz + p = 0$.
 (x, y) est alors solution du système si, et seulement si, $\{x, y\}$ est l'ensemble des solutions de $z^2 - sz + p = 0$.

Exercice 12. Résoudre le système $\begin{cases} xy = -1 + i \\ x + y = 1 + 2i \end{cases}$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

5 Racines n -èmes d'un nombre complexe

5.1 Racines n -èmes de l'unité

Définition.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *racine n -ème de l'unité* tout nombre complexe z tel que $z^n = 1$.

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -èmes de l'unité : $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$.

Remarques.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $z \in \mathbb{U}_n$, alors $1 = |z^n| = |z|^n$, et donc $|z| = 1$. Ainsi, $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}$.
- $i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1$, donc i est une racine 4-ème de l'unité. C'est aussi une racine 8-ème de l'unité puisque $i^8 = (i^4)^2 = 1^2 = 1$. On montre plus généralement que si n divise m , alors $\mathbb{U}_n \subset \mathbb{U}_m$.

Théorème 22

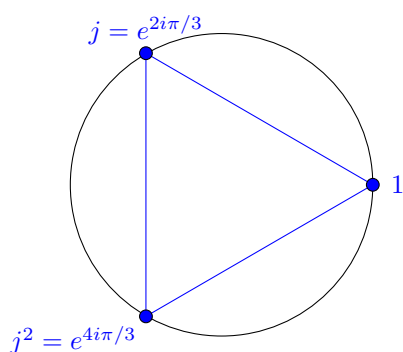
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe exactement n racines n -èmes de l'unité, qui sont les $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ avec $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.
 Ainsi :

$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}}, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \xi^k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} \quad \text{où } \xi = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

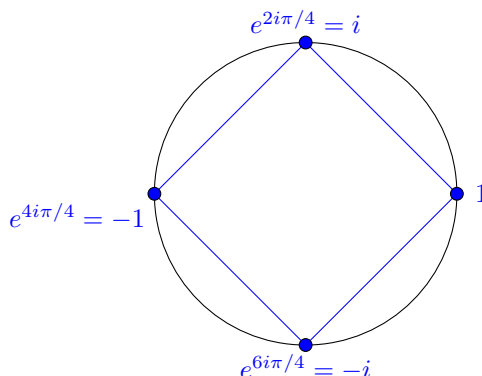
Exemples.

- $\mathbb{U}_2 = \{1, -1\}$ et $\mathbb{U}_4 = \{1, i, -1, -i\}$.
- Si $j = e^{\frac{2i\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, alors $\mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} = \{1, j, \bar{j}\}$.

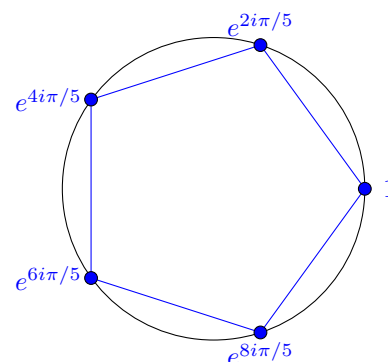
Remarque. Les éléments de $\mathbb{U}_n$ sont les affixes des sommets d'un polygone régulier à n côtés.



Racines 3-èmes de l'unité.



Racines 4-èmes de l'unité.



Racines 5-èmes de l'unité.

Exercice 13. Résoudre l'équation $(z + i)^n = (z - i)^n$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

Propriété 23

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$(1) \sum_{\omega \in \mathbb{U}_n} \omega = 0.$$

$$(2) \forall \xi \in \mathbb{U}_n \setminus \{1\}, \quad 1 + \xi + \dots + \xi^{n-1} = 0.$$

5.2 Racines n -èmes d'un complexe**Définition.**

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$. On appelle *racine n -ème de a* tout nombre complexe z tel que $z^n = a$.

Propriété 24

Soit $a \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Si $a = re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors $z_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ est une racine n -ème de a .

(2) a possède exactement n racines n -èmes. Si z_0 est l'une d'elles, alors les racines n -èmes de a sont les $z_0 \times e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

**Méthode. Comment déterminer les racines n -èmes d'un complexe ?**

Pour trouver les racines n -èmes d'un nombre complexe $a \in \mathbb{C}^*$, on procédera ainsi :

- (i) on en exhibe une z_0 en mettant a sous forme trigonométrique ;
- (ii) on obtient toutes les autres en multipliant z_0 par toutes les racines n -èmes de l'unité.

Exercice 14. Résoudre $z^8 = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}$.

6 Nombres complexes et géométrie plane

Soit $\mathcal{P}$ le plan affine euclidien orienté muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Rappelons qu'à tout point M (ou tout vecteur $\vec{u}$) du plan de coordonnées (x, y) correspond un unique complexe $z = x + iy$ et vice-versa.

6.1 Alignement et orthogonalité**Propriété 25**

Soient $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes z_1 et z_2 . Alors tout argument du complexe $\frac{z_2}{z_1}$ est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ et :

- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires si, et seulement si, $\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{R}$;
- $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont orthogonaux si, et seulement si, $\frac{z_2}{z_1} \in i\mathbb{R}$.

Corollaire 26

Soient A , B et C trois points deux à deux distincts du plan et d'affixes respectives a , b et c . Tout argument du complexe $\frac{c-a}{b-a}$ est une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et :

- A , B et C sont alignés si, et seulement si, $\frac{c-a}{b-a} \in \mathbb{R}$.
- le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si, $\frac{c-a}{b-a} \in i\mathbb{R}$.

Exercice 15. Soient A , B et C trois points distincts du plan. Démontrer la formule d'Al-Kashi :

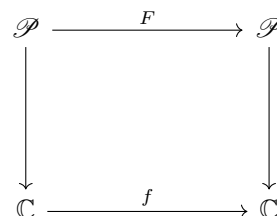
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}).$$

6.2 Transformations remarquables du plan

Si F est une application du plan dans lui-même, on peut lui associer une unique application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telle que, pour tous points M et M' d'affixes z et z' , on ait :

$$M' = F(M) \Leftrightarrow z' = f(z).$$

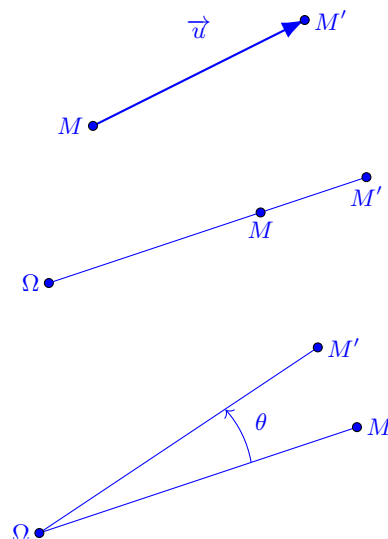
Et réciproquement, à $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut associer l'application $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.



Rappelons la définition de transformations classiques du plan, et déterminons leur forme complexe.

Définition.

- Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan. On appelle *translation de vecteur* $\vec{u}$ l'application qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$
- Soit Ω un point du plan, et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On appelle *homothétie de centre Ω et de rapport λ* l'application qui à tout point M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.
- Soit Ω un point du plan, et soit $\theta \in \mathbb{R}$. On appelle *rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ* l'application qui transforme Ω en Ω , et tout point $M \neq \Omega$ en l'unique point M' tel que $\Omega M' = \Omega M$ et $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}) \equiv \theta [2\pi]$.

**Remarques.**

- Une translation de vecteur non nul ne possède aucun point fixe. Une translation de vecteur nul est l'identité. Elle admet dans ce cas une infinité de points fixes.
- Une homothétie de rapport différent de 1 possède un unique point fixe qui est son centre. Une homothétie de rapport 1 est l'identité. Une homothétie de rapport -1 est une symétrie centrale par rapport à son centre.
- Une rotation d'angle $\theta \not\equiv 0 [2\pi]$ possède un unique point fixe qui est son centre. Une rotation d'angle $\theta \equiv 0 [2\pi]$ est l'identité. Une rotation d'angle $\theta \equiv \pi [2\pi]$ est une symétrie centrale par rapport à son centre.

Propriété 27

- Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe a . La translation de vecteur $\vec{u}$ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & z + a \end{cases}$$

- Soient Ω un point d'affixe ω , et $\lambda \in \mathbb{R}$. L'homothétie de centre Ω et de rapport λ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \lambda(z - \omega) + \omega \end{cases}$$

- Soient Ω un point d'affixe ω , et $\theta \in \mathbb{R}$. La rotation de centre Ω et d'angle de mesure θ est représentée dans le plan complexe par l'application

$$\begin{cases} \mathbb{C} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & e^{i\theta}(z - \omega) + \omega \end{cases}$$

6.3 Similitudes directes**Définition.**

Soit $F : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ une transformation du plan. On dit que F est une *similitude directe* si :

- elle envoie deux points distincts sur deux points distincts :

$$\forall (M, N) \in \mathcal{P}^2, \quad M \neq N \Rightarrow F(M) \neq F(N).$$

- elle préserve les rapports de distances : pour tout $(M, N, P, Q) \in \mathcal{P}^4$ avec $P \neq Q$,

$$\frac{F(M)F(N)}{F(P)F(Q)} = \frac{MN}{PQ}.$$

- elle préserve les angles orientés :

$$\forall (M, N, P, Q) \in \mathcal{P}^4, \quad (\overrightarrow{F(M)F(N)}, \overrightarrow{F(P)F(Q)}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{PQ}).$$

Propriété 28

Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Alors la transformation du plan associée à f est une similitude directe si, et seulement si, il existe $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tels que :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = az + b.$$

Corollaire 29

- (1) La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.
- (2) Les translations, rotations et homothéties sont des similitudes directes.

Remarque. Il résulte du deuxième point qu'une translation, une homothétie et une rotation conservent les angles orientés et les rapports des distances (et même les distances pour les translations et les rotations).

Propriété 30

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, et soit F la similitude directe du plan de forme complexe $z \mapsto az + b$.

- Si $a = 1$, alors F est la translation de vecteur d'affixe b .
- Si $a \neq 1$, alors F admet un unique point invariant Ω , appelé *centre de la similitude*. En désignant par α un argument de a , l'application F s'écrit $F = H \circ R = R \circ H$, avec :
 - R la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α ;
 - H l'homothétie de centre Ω et de rapport $|a|$.

Le réel $|a|$ est appelé *rapport de la similitude directe* F , et α est une *mesure de l'angle de la similitude directe* F .

Remarque. Avec les notations de la proposition précédente :

- si $a \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$, l'application F est l'homothétie de centre Ω et de rapport a ;
- si $|a| = 1$ et $a \neq 1$, l'application F est la rotation de centre Ω et d'angle de mesure α .



Méthode. Comment identifier la similitude directe associée à $z \mapsto az + b$?

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Pour identifier la similitude directe F de forme complexe $f : z \mapsto az + b$, on procèdera comme suit :

- si $a = 1$, F est une translation de vecteur d'affixe b ;
- si $a \neq 1$:
 - on cherche l'unique point fixe ω de f en résolvant $f(z) = z$;
 - on écrit a sous forme trigonométrique. En particulier, on détermine un argument α de a .

Dans ce cas, F est la similitude directe de centre Ω d'affixe ω , de rapport $|a|$ et d'angle de mesure α .

Exercice 16. Caractériser la transformation F du plan associée à $f : z \mapsto (1 + i\sqrt{3})z - i\sqrt{3}$.



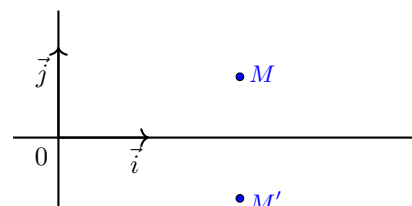
Pour aller plus loin.

Il existe aussi des transformations appelées *similitude indirectes*, qui sont les composées des similitudes directes par une symétrie axiale.

Elles conservent les rapports des distances également, mais transforment les angles en angles opposés.

On peut prouver que ce sont les transformations associées aux applications de la forme $z \mapsto a\bar{z} + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Leur étude générale est hors programme.

Plus généralement, on appelle similitude toute transformation qui préserve les rapports de distance. On peut prouver qu'alors il s'agit soit d'une similitude directe, soit d'une similitude indirecte.



Similitude indirecte associée à $z \mapsto \bar{z}$: la symétrie axiale d'axe (Ox) .

7 Fonctions à valeurs complexes

Dans toute cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction de la variable réelle à valeurs complexes. On note $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sa partie réelle et sa partie imaginaire, c'est-à-dire les fonctions définies sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in I, f(x) = \Re(f)(x) + i\Im(f)(x) \Leftrightarrow \begin{cases} \Re(f)(x) = \Re(f(x)) \\ \Im(f)(x) = \Im(f(x)) \end{cases}.$$

Définition.

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On dit que f est continue (resp. dérivable, $\mathcal{C}^1$) si les deux fonctions $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont continues (resp. dérivables, $\mathcal{C}^1$).

Si f est dérivable, on note alors $f' = \Re(f)' + i\Im(f)'$.

Exercice 17. Soit $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow \\ x & \mapsto \end{cases} \begin{cases} \mathbb{C} \\ xe^{(i+1)x} + (1+2i)x^2 \end{cases}$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer f' .

Propriété 31 (Opérations sur les fonctions dérivables)

Soient f et $g : I \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions dérivables sur I .

- Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, $(\lambda f + \mu g)$ est dérivable sur I , et : $(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g'$.
- $f \times g$ est dérivable sur I , et : $(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$.
- Si g ne s'annule pas sur I , $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I , et : $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$.

Propriété 32

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient φ une fonction dérivable de I dans J , et f une fonction dérivable de J dans $\mathbb{C}$. Alors $f \circ \varphi$ est dérivable sur I , et : $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times f' \circ \varphi$.

Propriété 33

Soit $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction dérivable. Alors, e^φ est dérivable sur I et : $(e^\varphi)' = \varphi' \times e^\varphi$.

Remarque. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on définit récursivement la dérivée n -ème, si elle existe, d'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$. On notera que f admet une dérivée n -ème sur I si, et seulement si, $\Re(f)$ et $\Im(f)$ admettent une dérivée n -ème sur I , et alors :

$$\Re(f^{(n)}) = \Re(f)^{(n)} \quad \text{et} \quad \Im(f^{(n)}) = \Im(f)^{(n)}.$$

On montre que les théorèmes opératoires sur les fonctions dérivables à valeurs complexes s'étendent au cas des fonctions k fois dérivables pour tout $k \in \mathbb{N}$, ou indéfiniment dérivables.

Exercice 18. Déterminer la dérivée n -ème de $f : x \rightarrow e^x \sin(\sqrt{3}x)$.

Pour les fonctions à valeurs complexes, pas question de parler de monotonie ou de signe de la dérivée puisqu'il n'y a pas d'inégalités dans $\mathbb{C}$, mais le théorème suivant est en revanche conservé.

Propriété 34

Soit f une fonction dérivable sur I à valeurs dans $\mathbb{C}$.

La fonction f est constante si, et seulement si, pour tout $t \in I$, $f'(t) = 0$.

**Liens utiles.**

Construction du corps des complexes, complément de cours 1.



Pique-nique sur le plan complexe, Voyage au pays des maths, ARTE.



5 exos sur les racines n -èmes complexes, Cassou Math Prépa.