Chapitre 8

Calcul de primitives et d'intégrales

Compétences attendues.

- ✓ Connaitre les primitives usuelles.
- ✓ Calculer une primitive ou une intégrale à l'aide d'une intégration par parties ou d'un changement de variable.
- ✓ Décomposer en éléments simples et calculer une primitive d'une fraction rationnelle.

Anthony Mansuy - Professeur en MP2I au Lycée Roosevelt (Reims)
Page personnelle : `anthony-mansuy.fr/`
E-mail : `mansuy.anthony@hotmail.fr`

1 Calculs de primitives et d'intégrales

Dans ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'un des ensembles $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1.1 Primitives d'une fonction continue

Définition.

On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I si f est dérivable sur I de dérivée f' continue sur I.

Définition.

Soit $f : I \mapsto \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle I. On appelle *primitive* de f sur I toute fonction F de classe $\mathscr{C}^1$ sur I telle que $F' = f$.

Exemples.

- Une primitive de $x \mapsto x^\alpha$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est $x \mapsto \frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$ si $\alpha \neq -1$, $x \mapsto \ln(x)$ si $\alpha = -1$.
- Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$. Une primitive de $x \mapsto e^{\omega x}$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto \frac{1}{\omega}e^{\omega x}$.

Remarque. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle I. Si F_1 est une primitive de $\Re(f)$ sur I et F_2 une primitive de $\Im(f)$ sur I, alors $F = F_1 + iF_2$ est une primitive de f sur I. Par exemple, une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto 1 + ix$ est $x \mapsto x + i\frac{x^2}{2}$.

Propriété 1 (Lien entre deux primitives d'une même fonction)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et soit F une primitive de f sur I.
Une fonction $G : I \to \mathbb{K}$ est une primitive de f si, et seulement si, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $G = F + \lambda$.

Mise en garde.

Ce résultat a une conséquence immédiate : dès qu'il existe une primitive de f, il en existe une infinité. On se gardera donc bien de parler de **la** primitive de f, mais bien d'**une** primitive de f.

On admet provisoirement le résultat suivant, qui sera démontré plus tard dans l'année.

Théorème 2 (*Théorème fondamental de l'analyse*, version 1)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Alors f admet une primitive F sur I.

Remarques.

- Le théorème fondamental de l'analyse garantit l'existence de primitives, mais il ne dit absolument pas comment les trouver.
- Contrairement au calcul de dérivées qui est totalement algorithmique (à partir des dérivées usuelles et des opérations sur les fonctions dérivables), le calcul de primitives est un problème difficile. À titre d'exemple, la fonction $x \mapsto e^{-x^2}$ admet des primitives sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle y est continue. Pourtant, il n'est pas possible d'exprimer l'une de ces primitives à l'aide d'opérations sur les fonctions usuelles (résultat difficile dû à Liouville).

1.2 Intégrale sur un segment

Nous donnerons plus tard dans l'année une définition rigoureuse d'une intégrale sur un segment, en lien avec la notion d'aire. Le but de ce chapitre étant avant tout de nous intéresser à l'aspect calculatoire et à la pratique du calcul de primitives, nous nous contenterons provisoirement de la définition suivante (celle manipulée au lycée).

Définition.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Si F est une primitive de f sur I, on pose pour tout $(a,b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Cette quantité ne dépend pas de la primitive F choisie, et est appelée *intégrale de f sur le segment* $[a,b]$.

Notation.

- La variable d'intégration (notée t dans la définition ci-dessus) est une variable muette, et peut donc être remplacée par n'importe quel autre symbole non utilisé ailleurs.
- La notation $\mathrm{d}t$ n'aura pour nous pas d'autre signification et d'intérêt que de nous rappeler sur quelle variable porte l'intégration. Elle aura aussi une utilité pratique lorsque nous effectuerons des changements de variables.
- La notation $\displaystyle\int$ de l'intégrale est due à Leibniz, et correspond au « s long » de l'époque pour évoquer le mot somme. En effet, comme nous le verrons plus tard dans l'année, une intégrale peut s'interpréter comme une somme infinie d'aires de rectangles de hauteur $f(t)$ et de base $\mathrm{d}t$ infiniment petite.

Propriété 3 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue)

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I, $a,b,c \in I$ et $\lambda,\mu \in \mathbb{K}$.

(1) *Lien avec les parties réelle et imaginaire :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Re(f(t))\,\mathrm{d}t + i\int_a^b \Im(f(t))\,\mathrm{d}t.$

(2) *Linéarité :* $\displaystyle\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t))\,\mathrm{d}t = \lambda\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

(3) *Relation de Chasles :* $\displaystyle\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\,\mathrm{d}t.$

(4) *Inversion des bornes :* $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t.$

Propriété 4 (Propriétés de l'intégrale d'une fonction continue réelle)

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I **à valeurs réelles**, et $a,b \in I$.

(1) *Positivité :* si $f \geq 0$ et $a \leq b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geq 0.$

(2) *Croissance :* si $f \leq g$ et $a \leq b$, $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$

(3) *Nullité de l'intégrale :* si $a < b$ et f est **continue** et **positive** sur $[a,b]$ et telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$ alors $f(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

(4) *Positivité stricte :* si $a < b$ et f est **continue** et **positive** sur $[a,b]$, et s'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) > 0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t > 0.$

Propriété 5 (*Inégalité triangulaire*)

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur I, et soient $a, b \in I$ tels que $a \leq b$. Alors :

$$\left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Théorème 6 (*Théorème fondamental de l'analyse*, version 2)

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soit $a \in I$. Alors la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et c'est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a.

Exemple. La fonction ln a été définie comme l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ qui s'annule en 1. En d'autres termes, $\ln(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

1.3 Calcul de primitives

Notation.

Quand on calcule une primitive $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ d'une fonction continue f, le choix du réel a importe peu car deux choix différents conduisent au même résultat à une constante additive près. On peut donc omettre la borne inférieure de l'intégrale dans ce cas, et noter $\displaystyle\int^x f(t)\,\mathrm{d}t$ n'importe quelle primitive de f. Par exemple :

$$\int^x \left(t^2 + 2t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Mais on aurait tout aussi bien pu écrire :

$$\int^x \left(t^2 + 2t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{\pi^2}{6}$$

et aboutir à l'« égalité » suivante, qui peut paraitre déroutante :

$$\frac{x^3}{3} + x^2 + \frac{\pi^2}{6} = \int^x \left(t^2 + 2t\right)\,\mathrm{d}t = \frac{x^3}{3} + x^2.$$

Il faut ici bien comprendre que les symboles $=$ qui y figurent ne sont pas de « vrais » symboles d'égalité, mais plutôt des symboles de congruence $\equiv$ modulo l'ensemble des fonctions constantes.

Méthode. Primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.

Pour déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$, il sera souvent plus simple de passer par la forme complexe $x \mapsto \mathrm{e}^{(a+ib)x}$, dont on connaît une primitive, et d'en prendre sa partie réelle ou imaginaire.

Exercice 1. Calculer une primitive de $f : x \mapsto e^{2x}\cos(x)$.

Méthode. Primitives des polynômes trigonométriques.
Pour déterminer des primitives de fonctions qui sont composées de produits de sinus et cosinus, on commence par linéariser ces expressions (généralement en utilisant les formules d'Euler).

Exercice 2. Calculer une primitive de $f : x \mapsto 2\sin^2(2x)\cos(3x)$.

1.4 Primitives usuelles

Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$	Domaine de validité
x^n, $n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert)$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
x^n, $n \in \mathbb{Z}, n \leq -2$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
x^α, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{\alpha+1}x^{\alpha+1}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\ln(x)$	$x\ln(x) - x$	$\mathbb{R}_+^*$
$e^{\omega x}$, $\omega \in \mathbb{C}^*$	$\frac{1}{\omega}e^{\omega x}$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\tan(x)$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert)$	$]-\frac{\pi}{2}+k\pi, \frac{\pi}{2}+k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$
$\mathrm{sh}(x)$	$\mathrm{ch}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{ch}(x)$	$\mathrm{sh}(x)$	$\mathbb{R}$
$\mathrm{th}(x)$	$\ln(\mathrm{ch}(x))$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x)$	$]-1,1[$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{(x-a)^2+b^2}$, $a \in \mathbb{R}$, $b > 0$	$\frac{1}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right)$	$\mathbb{R}$

Hypothèses	Fonction $x \mapsto \dots$	Primitive $x \mapsto \dots$
$u : I \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I	$u'e^u$	e^u
$u : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ ne s'annulant pas sur I	$\frac{u'}{u}$	$\ln(\lvert u\rvert)$
$u : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement positive sur I	$u'u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\frac{1}{\alpha+1}u^{\alpha+1}$

2 Intégration par parties et changement de variable

2.1 Intégration par parties

Propriété 7 (*Intégration par parties*)

Soient f et g deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$ à valeur dans $\mathbb{K}$. Alors :

$$\int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[f(t)g(t)\Big]_a^b - \int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Rédaction.

En pratique, on procèdera à une intégration par parties en utilisant le tableau suivant :

	(Dérivation)		(Intégration)	
+	$\boxed{g}$	$\searrow$	f'	$\boxed{\text{fonctions } \mathscr{C}^1}$
-	g'	$\xleftarrow{\int}$	$\boxed{f}$	

Exercice 3. Calculer $I = \displaystyle\int_1^e t\ln(t)\,\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_0^\pi (t^2 - t + 1)\cos(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On peut aussi pratiquer des intégrations par parties sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t = f(x)g(x) - \int^x f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4. Déterminer des primitives de $x \mapsto \ln(x)$ et de $x \mapsto \arctan(x)$.

Astuce.

Le choix de la fonction à dériver (et donc de celle à intégrer) n'est pas toujours aisé, et il vous faudra un peu d'intuition et d'habitude pour effectuer une intégration par parties.

La règle des A.L.P.E.S. peut vous y aider. Elle propose un ordre de priorité pour le choix de la fonction à dériver, en privilégiant la classe de fonctions correspondante à la lettre la plus à gauche dans l'ordre des lettres du mot A.L.P.E.S. :

- la lettre A pour les fonctions arcsin, arccos, arctan (mais aussi argsh, argch, argth) ;
- la lettre L pour la fonction logarithme ;
- la lettre P pour fonctions polynomiales ;
- la lettre E pour exponentielle ;
- la lettre S pour sin, cos, tan, sh, ch, th.

2.2 Changement de variable

Propriété 8 (*Changement de variable*)

Soient $f : J \to \mathbb{K}$ une fonction continue sur un intervalle J, φ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I à valeurs dans J, et $a, b \in I$. Alors :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode. Comment effectuer un changement de variable ?

La formule précédente n'est pas à apprendre « par cœur », mais est à retrouver à chaque fois que l'on effectue un changement de variable. On veillera pour cela à modifier les trois éléments suivants :

- *la variable* $x = \varphi(t)$ *;*
- *l'élément différentiel* $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ *;*
- *les bornes de l'intégrale : si* t *varie entre* a *et* b, $x = \varphi(t)$ *varie entre* $\varphi(a)$ *et* $\varphi(b)$.

Danger.

Après avoir effectuer un changement de variable, la variable de départ ne doit plus figurer, seule la nouvelle variable doit apparaître dans le symbole intégrale $\int$.

Exercice 5. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,\mathrm{d}t$.

Propriété 9 (Intégrale d'une fonction paire/impaire/périodique)

(1) Soit f une fonction continue sur un segment $[-a, a]$. Alors :

- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t$ si f paire ;
- $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ si f impaire.

(2) Soit f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et T périodique. Alors :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \qquad \int_a^{a+T} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas où l'on donne l'ancienne variable en fonction de la nouvelle, il faudra alors prendre garde d'utiliser un changement de variable bijectif afin d'exprimer la nouvelle variable en fonction de l'ancienne.

Exercice 6. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Remarque. On peut aussi pratiquer des changements de variable sur des intégrales sans borne inférieure pour calculer des primitives. La formule prend dans ce cas la forme suivante :

$$\int^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int^{\varphi(x)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exercice 7. Déterminer une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{(x-a)^2+b^2}$ (où $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$).

Exercice 8. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de $x \mapsto \cos(2\ln(x))$.

3 Primitives de fractions rationnelles

Définition.

On appelle *fraction rationnelle réelle* toute fonction f pour laquelle il existe deux fonctions polynomiales P et Q à coefficients réels avec $Q \neq 0$, et tels que :

- $\mathscr{D}_f = \{x \in \mathbb{R} \mid Q(x) \neq 0\}$;
- $\forall x \in \mathscr{D}_f,\ f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$.

Les points où f n'est pas défini sont les racines de Q, qu'on appelle aussi les *pôles* de $f = \dfrac{P}{Q}$.

On appelle *degré de la fraction rationnelle* f l'entier noté $\deg(f)$ égal à $\deg(P) - \deg(Q)$.

Dans toute la suite, f désignera une fraction rationnelle $x \mapsto \dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Le but de cette section est de présenter des techniques pour déterminer une primitive de f. Nous ne nous intéresserons qu'au cas où $\deg(f) < 0$, ce que nous supposerons dorénavant. Nous verrons dans un chapitre à venir que nous pourrons toujours nous y ramener, quitte à effectuer la division euclidienne de P par Q.

3.1 Décomposition en éléments simples

On admet (provisoirement encore une fois) le résultat suivant.

Propriété 10 (Décomposition en éléments simples lorsque Q est scindé)

Supposons Q de la forme $Q : x \mapsto (x-a_1)^{m_1} \dots (x-a_k)^{m_k}$ où $a_1, \dots, a_k$ des réels deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$. Alors il y a existence et unicité de scalaires $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_1}^{(1)}, \dots, \lambda_1^{(k)}, \dots, \lambda_{m_k}^{(k)} \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$:

$$f(x) = \frac{\lambda_1^{(1)}}{x-a_1} + \frac{\lambda_2^{(1)}}{(x-a_1)^2} + \dots + \frac{\lambda_{m_1}^{(1)}}{(x-a_1)^{m_1}} + \dots + \frac{\lambda_1^{(k)}}{x-a_k} + \dots + \frac{\lambda_{m_k}^{(k)}}{(x-a_k)^{m_k}}. \qquad (E)$$

Exercice 9. Sous quelle forme chercher la décomposer en éléments simple de

$$f_1 : x \mapsto \frac{x-1}{x(x+1)(x+2)} \qquad \text{et} \qquad f_2 : x \mapsto \frac{x^2+2x+1}{(x-1)(x+2)^2}.$$

Remarque. Une fois admis l'existence d'une telle décomposition, il s'agit à présent de savoir comment déterminer les scalaires $\lambda_1^{(1)}, \dots, \lambda_{m_k}^{(k)}$. Une première méthode consiste à tout mettre au même dénominateur et à procéder par identification. Bien que fonctionnant toujours, elle peut vite s'avérer laborieuse en termes de calculs. Donnons quelques méthodes plus efficientes.

Méthode. Détermination des scalaires dans la décomposition en éléments simples.

Afin de déterminer les scalaires intervenants dans la décomposition en éléments simples de f, on pourra :

- *multiplier pour tout $i \in [\![1, k]\!]$ l'égalité (E) par $(x-a_i)^{m_i}$, puis évaluer[a] en $x = a_i$, ce qu'on notera simplement :*
$$\lambda_{m_i}^{(i)} = \left.\frac{(x-a_i)^{m_i} P(x)}{Q(x)}\right|_{x=a_i}.$$
- *multiplier (E) par x et faire tendre x vers $+\infty$;*
- *utiliser la parité éventuelle de f ;*
- *évaluer (E) en n'importe quel x qui n'est pas un pôle de f.*

[a] ou plus rigoureusement faire tendre x vers a_i, ce qui reviendra au même d'un point de vue calculatoire.

Exercice 10. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$f_1 : x \mapsto \frac{3x^2 - 3x - 2}{(x+1)^2(x-3)} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{-3x+16}{(x+3)(x-2)^2}.$$

Remarque. La fonction polynomiale Q ne pourra pas toujours s'écrire sous forme scindée, c'est-à-dire comme un produit de facteurs de degré 1. Par exemple si Q est la fonction polynomiale $x \mapsto x^3 - 1$, alors $Q(x) = (x-1)(x^2+x+1)$ et nous ne pouvons aller plus loin dans la factorisation réelle, le discriminant de x^2+x+1 étant strictement négatif. Dans ce cas, on procèdera comme suit.

Méthode. Décomposition en éléments simples avec facteurs irréductibles de degré 2.
Lorsque la décomposition du polynôme Q fait intervenir des facteurs de la forme $(x^2+bx+c)^m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$ et $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, on ajoutera dans la décomposition en éléments simples (E) de $\frac{P}{Q}$ la composante suivante pour chacun de ces facteurs :

$$\frac{\lambda_1 x + \mu_1}{x^2+bx+c} + \frac{\lambda_2 x + \mu_2}{(x^2+bx+c)^2} + \cdots + \frac{\lambda_m x + \mu_m}{(x^2+bx+c)^m}$$

où $\lambda_1, \mu_1, \ldots, \lambda_m, \mu_m \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles

$$f_1 : x \mapsto \frac{x^2-1}{x^4+x^2} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{2x+1}{x^3-1}.$$

3.2 Calcul d'une primitive d'une fraction rationnelle

Pour déterminer une primitive d'une fraction rationnelle $f : x \mapsto \frac{P(x)}{Q(x)}$, on commencera par effectuer sa décomposition en éléments simples. Dans le cas où Q est scindé, on se ramène ainsi à une somme de termes de la forme $x \mapsto \frac{1}{(x-a)^r} = (x-a)^{-r}$, dont le calcul d'une primitive ne pose pas de difficulté :

$$\int^x \frac{1}{(t-a)^r}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} \frac{1}{-r+1}(x-a)^{-r+1} = \frac{-1}{r-1}\frac{1}{(x-a)^{r-1}} & \text{si } r \geq 2 \\ \ln(|x-a|) & \text{si } r = 1 \end{cases}.$$

Le cas général est plus délicat : il nécessite entre autres la recherche d'une primitive de fractions rationnelles de la forme :

$$f : x \mapsto \frac{\lambda x + \mu}{ax^2+bx+c}$$

où a, b, c, λ et μ sont des réels tels que $b^2 - 4ac < 0$. Quitte à factoriser par $\frac{\lambda}{a}$, on peut supposer $a = 1$ et $\lambda = 1$. On met alors sous forme canonique le polynôme au dénominateur :

$$f(x) = \frac{x+\mu}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

puis on fait apparaître la dérivée $\frac{u'}{u}$ d'un logarithme :

$$\frac{x+\mu}{(x-\alpha)^2+\beta^2} = \frac{x-\alpha}{(x-\alpha)^2+\beta^2} + (\alpha+\mu)\frac{1}{(x-\alpha)^2+\beta^2}$$

dont une primitive est :

$$x \mapsto \frac{1}{2}\ln((x-\alpha)^2+\beta^2) + \frac{\alpha+\mu}{\beta}\arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right).$$

Exercice 12. Déterminer une primitive de

$$f_1 : x \mapsto \frac{2x+1}{x^3-1} \quad \text{et} \quad f_2 : x \mapsto \frac{x}{(x+1)^2(x^2+2x+3)}.$$

Remarque. Nous ne dirons rien de l'intégration des éléments simples du type $\frac{ex+f}{(ax^2+bx+c)^n}$ pour $n \geq 2$. L'énoncé vous guidera si besoin.