Colle 1.

Question de cours. Définition et propriétés des coefficients binomiaux.

Preuve. Première inégalité triangulaire avec cas d'égalité, ainsi que deuxième inégalité triangulaire.

Exercice 1

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(E) $|2x+3| - |2-x| = -3,$ $\qquad$ (I) $|2x+1| \leq |x+2| + 2x.$

Exercice 3

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(nx) = nf(x)$.
4. On pose $a = f(1)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$.
5. Conclure.

Exercice 4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k.k!$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\sum_{k=n}^{2n} k^2$ $\qquad$ (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 \binom{n}{k}$

Colle 2.

Question de cours. Formules sur les sommes.

Preuve. Relations sur les coefficients binomiaux et $\binom{n}{p} \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+x)^n \geq 1 + nx$.

Exercice 6

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

(E) $|x+1| + |2x+1| = 0,$ $\qquad$ (I) $|x+3| - 2\,|x-1| > 2.$

Exercice 7

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor (\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2 \rfloor = 4n+1$.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$

2. En déduire la valeur de S_n.

Colle 3.

Question de cours. Définition et propriétés de la valeur absolue.

Preuve. Formule du binôme de Newton.

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\ln(|x|) + \ln(|x+1|) = 0$.

Exercice 10

Soit x un réel. Déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor}{n^2}$.

Exercice 11

1. Déterminer le maximum de la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = x(1-x)$.
2. Soient a, b, c trois réels de $[0,1]$. Montrer que l'un au moins des nombres $a(1-c), b(1-a), c(1-b)$ est inférieur à $\frac{1}{4}$.

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

(1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k}$ $\qquad$ (2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1}$ $\qquad$ (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k}$
