Colle 1.

Question de cours. Théorème de la limite monotone.

Preuve. Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x+1}; \qquad \lim_{x\to 0} x\sin(\ln(x)).$$

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale.

1. Montrer que, si f est de degré impair, alors f possède au moins une racine réelle.
2. Ce résultat est-il encore vrai si on suppose f de degré pair ?

Exercice 3

Montrer que $f(x) = \lim\limits_{p\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty} |\cos(p!\pi x)|^n\right)$ n'est continue en aucun point de $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f|$ est constante.
Montrer que f est constante.

Colle 2.

Question de cours. Définitions de $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \ell$.

Preuve. Théorème des bornes atteintes et image continue d'un segment.

Exercice 5

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x\cos(e^x)}{x^2+1}; \qquad \lim_{x\to 0} x^{\sqrt{x}}.$$

Exercice 6

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 7

Montrer que $f : \begin{cases} x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} & \mapsto & 0 \\ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q} & \mapsto & \frac{1}{p} \end{cases}$ est continue en tout point irrationnel et discontinue en tout point rationnel.

Exercice 8

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue.
Montrer que f admet un point fixe si et seulement si $f \circ f$ admet un point fixe.

Colle 3.

Question de cours. Formules sur les cardinaux.

Preuve. Caractérisation séquentielle de la limite.

Exercice 9

Étudier les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} xe^{-\sqrt{x}}; \qquad \lim_{x\to+\infty} (x^2 + x\sin(x)).$$

Exercice 10

Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $x_n \in [0,1]$ tel que $f(x_n) = x_n^n$.

Exercice 11

1. Montrer que cos n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 12

Soient $f, g : [0,1] \to [0,1]$ continues et telles que $f \circ g = g \circ f$.
Montrer qu'il existe $x_0 \in [0,1]$ tel que $f(x_0) = g(x_0)$.
