Colle 1.

Question de cours. Matrices inversibles : définition et propriétés.

Preuve. Théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction polynomiale.

1. Montrer que, si f est de degré impair, alors f possède au moins une racine réelle.
2. Ce résultat est-il encore vrai si on suppose f de degré pair ?

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = I_2 + B$.
2. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire A^k.

Exercice 3

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Déterminer :

$$\lim_{x \to a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

Exercice 4

On considère pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ AM = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ A^2M = AM\right\}. \end{aligned}$$

1. (a) Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
   (b) Montrer que $E_1(A) = E_2(A)$ si A est inversible.
2. (a) Établir que $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I_3$ est inversible.
   (b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Colle 2.

Question de cours. Formules sur les dérivées.

Preuve. Théorème des bornes atteintes et image continue d'un segment.

Exercice 5

Soit I un intervalle et $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in I,\ (f(x))^2 = 1$. Montrer que $f = 1$ ou $f = -1$.

Exercice 6

Soient A, P, Q les trois matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP.
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n, l'expression de A^n en fonction de a, b, P, Q et n.

Exercice 7

Étudier la dérivabilité sur $[0, 1]$ de $f(x) = \sqrt{x^3(1-x)}$.

Exercice 8

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R},\ N(a)N(b) = N(a+b)$.
2. En déduire que, pour tout réel a, $N(a)$ est inversible et expliciter $(N(a))^{-1}$.

Colle 3.

Question de cours. Définition d'une fonction dérivable.

Preuve. Propriétés de la trace.

Exercice 9

1. Montrer que $\cos$ n'a pas de limite en $+\infty$.
2. Montrer que $x \mapsto \frac{1}{x} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en 0.

Exercice 10

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que :
$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}.$$
2. En déduire a_n puis A^n en fonction de n.

Exercice 11

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ continue telle que $|f|$ est constante. Montrer que f est constante.

Exercice 12

Soient $A, B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\mathrm{tr}(A^2) \geq 0$.
2. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \mathrm{tr}\left((\lambda A + B)^2\right)$, prouver que : $\mathrm{tr}\left((AB)^2\right) \leq \mathrm{tr}\left(A^2\right) \mathrm{tr}\left(B^2\right)$.
