

Colle 1.

Question de cours. Caractérisation d'un sous-groupe.

Preuve. f est dérivable en a ssi f admet un DL d'ordre 1 en a + dérivable implique continue.

Exercice 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables en $a \in I$. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}.$$

Exercice 2

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $A = I_2 + B$.
2. Calculer B^k pour tout $k \in \mathbb{N}$, et en déduire A^k .

Exercice 3

Soit $(G, *)$ un groupe admettant un élément neutre e et tel que $\forall a \in G, a^2 = e$.

Montrer que $(G, *)$ est commutatif.

Exercice 4

On considère pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ les ensembles suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), AM = M\} \\ E_2(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), A^2M = AM\}. \end{aligned}$$

1. (a) Établir que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
(b) Montrer que $E_1(A) = E_2(A)$ si A est inversible.
2. (a) Établir que $E_1(A) = \{0\}$ si $A - I_3$ est inversible.
(b) Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$.

Colle 2.

Question de cours. Formules sur les dérivées.

Preuve. L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Exercice 5

Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

En considérant la fonction $g(x) = f(x)x^\lambda$, montrer que $\exists c \in]a, b[, f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 6

Soient A, P, Q les trois matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer P^2, Q^2, PQ et QP .
2. Déterminer deux réels a et b tels que $A = aP + bQ$.
3. En déduire que, pour tout entier naturel n , l'expression de A^n en fonction de a, b, P, Q et n .

Exercice 7

Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes d'un groupe $(G, *)$. Montrer que :

$$H_1 \cup H_2 \text{ groupe} \Leftrightarrow H_1 \subset H_2 \text{ ou } H_2 \subset H_1.$$

Exercice 8

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on pose $N(a) = \begin{pmatrix} a+1 & -a & -a \\ a & -a+1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que : $\forall a, b \in \mathbb{R}, N(a)N(b) = N(a+b)$.
2. En déduire que, pour tout réel a , $N(a)$ est inversible et expliciter $(N(a))^{-1}$.

Colle 3.

Question de cours. Définition d'un groupe.

Preuve. Égalité des accroissements finis + f croissante ssi f' positive.

Exercice 9

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $a_n \in \mathbb{R}$ tel que :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1 - 2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n + 1 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire a_n puis A^n en fonction de n .

Exercice 10

Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que

$$\mathcal{Z}(G) = \{c \in G \mid \forall g \in G, g * c = c * g\}$$

est un sous-groupe commutatif de G .

Exercice 11

Soient $A, B \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que : $\text{tr}(A^2) \geq 0$.
2. En étudiant la fonction $\lambda \mapsto \text{tr}((\lambda A + B)^2)$, prouver que : $\text{tr}((AB)^2) \leq \text{tr}(A^2) \text{tr}(B^2)$.

Exercice 12

Étudier la dérivabilité sur $[0, 1]$ de $f(x) = \sqrt{x^3(1-x)}$.