

Colle 1.

Question de cours. Caractérisation d'un sous-groupe.

Preuve. Caractérisation de l'injectivité à l'aide du noyau.

Exercice 1

Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l'infini des termes suivants :

$$(1) \ln(n) + 2n - 1 \quad (2) \ln(2 - e^{-1/n^2})$$

Exercice 2

Soit $(G, *)$ un groupe admettant un élément neutre e et tel que $\forall a \in G, a^2 = e$.

Montrer que $(G, *)$ est commutatif.

Exercice 3

- Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
- En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 4

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{cases} \mathbb{U}_{mn} & \rightarrow & \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n \\ z & \mapsto & (z^n, z^m) \end{cases}$

- Montrer que f est un morphisme de groupes.
- Déterminer un entier k tel que $\text{Ker}(f) = \mathbb{U}_k$.
- Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme.

Colle 2.

Question de cours. Equivalents classiques au voisinage de 0.

Preuve. L'intersection de sous-groupes est un sous-groupe.

Exercice 5

Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l'infini des termes suivants :

$$(1) \ln(2n^3 + 1) \quad (2) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2} - 1}$$

Exercice 6

Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.

- Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Préciser son élément neutre.
- Montrer que R est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(G, \times)$. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 7

Soient $a, b, \lambda \in \mathbb{R}$ tels que $0 < a < b$, soit f une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ telle que $f(a) = f(b) = 0$.

En considérant la fonction $g(x) = f(x)x^\lambda$, montrer que $\exists c \in]a, b[, f'(c) = -\lambda \frac{f(c)}{c}$.

Exercice 8

Soit $(A, +, \times)$ un anneau commutatif, intègre et fini.

Pour tout $a \neq 0$, on considère $f_a : \begin{cases} A & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$.

- Montrer que f_a est une application bijective.
- En déduire que A est un corps.

Colle 3.

Question de cours. Définition d'un groupe.

Preuve. Égalité des accroissements finis + f croissante ssi f' positive.

Exercice 9

Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l'infini des termes suivants :

$$(1) \sqrt{n+1} + \sqrt{n-1} \quad (2) n(\sqrt[n]{2} - 1)$$

Exercice 10

Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que

$$\mathcal{Z}(G) = \{c \in G \mid \forall g \in G, g * c = c * g\}$$

est un sous-groupe commutatif de G .

Exercice 11

Soit (v_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \geq 2, \quad n \ln(n) \leq v_n \leq 2n \ln(n).$$

Donner un équivalent simple de $\ln(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12

On considère l'ensemble $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.

- Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un anneau.
- Montrer que $a + bj$ est inversible si et seulement si $a^2 - ab + b^2 = 1$.
- Montrer que si $a + bj$ est inversible, alors $4 - 3b^2 \geq 0$.
- En déduire les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.