

Colle 1.

Question de cours. Caractérisation d’un sous-groupe.

Preuve. Caractérisation de l’injectivité à l’aide du noyau.

Exercice 1
Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l’infini des termes suivants :

(1) $\ln(n) + 2n - 1$

(2) $\ln(2 - e^{-1/n^2})$

Exercice 2
Soit $(G, *)$ un groupe admettant un élément neutre e et tel que $\forall a \in G, a^2 = e$.
Montrer que $(G, *)$ est commutatif.

Exercice 3
1. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{k} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!}$.
2. En déduire, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

Exercice 4
Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{cases} \mathbb{U}_{mn} & \rightarrow & \mathbb{U}_m \times \mathbb{U}_n \\ z & \mapsto & (z^n, z^m) \end{cases}$
1. Montrer que f est un morphisme de groupes.
2. Déterminer un entier k tel que $\text{Ker}(f) = \mathbb{U}_k$.
3. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que f soit un isomorphisme.

Colle 2.

Question de cours. Equivalents classiques au voisinage de 0.

Preuve. Division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 5
Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l’infini des termes suivants :

(1) $\ln(2n^3 + 1)$

(2) $\frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{e^{1/n^2} - 1}$

Exercice 6
Soit $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $G = \{R_\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$.
1. Montrer que $(G, \times)$ est un groupe. Préciser son élément neutre.
2. Montrer que R est un morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(G, \times)$. Est-ce un isomorphisme ?

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $X(X + 1)(2X + 1)$ divise $(X + 1)^{2n} - X^{2n} - 2x - 1$.

Exercice 8
Soit $(A, +, x)$ un anneau commutatif, intègre et fini.
Pour tout $a \neq 0$, on considère $f_a : \begin{cases} A & \rightarrow & A \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$.
1. Montrer que f_a est une application bijective.
2. En déduire que A est un corps.

Colle 3.

Question de cours. Propriétés sur le degré d’un polynôme.

Preuve. $n! = o(n^n)$.

Exercice 9
Déterminer des équivalents simples puis la limite quand n tend vers l’infini des termes suivants :

(1) $\sqrt{n+1} + \sqrt{n-1}$

(2) $n(\sqrt[n]{2} - 1)$

Exercice 10
Soit $(G, *)$ un groupe. Montrer que
$$\mathcal{Z}(G) = \{c \in G \mid \forall g \in G, g * c = c * g\}$$
est un sous-groupe commutatif de G .

Exercice 11
Soit (v_n) une suite vérifiant :

$$\forall n \geq 2, \quad n \ln(n) \leq v_n \leq 2n \ln(n).$$

Donner un équivalent simple de $\ln(v_n)$ au voisinage de $+\infty$.

Exercice 12
On considère l’ensemble $\mathbb{Z}[j] = \{a + bj \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
1. Montrer que $\mathbb{Z}[j]$ est un anneau.
2. Montrer que $a + bj$ est inversible si et seulement si $a^2 - ab + b^2 = 1$.
3. Montrer que si $a + bj$ est inversible, alors $4 - 3b^2 \geq 0$.
4. En déduire les inversibles de $\mathbb{Z}[j]$.