Colle 1.

Question de cours. $\cos(a+b)$ et $\tan(a-b)$ + Définition et propriétés des coefficients binomiaux.

Preuve. Première inégalité triangulaire avec cas d'égalité, ainsi que deuxième inégalité triangulaire.

Exercice 1

Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \exp(x) \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}.$$

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right).$$

Exercice 3

On cherche à déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ vérifiant :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y).$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(-x) = -f(x)$.
3. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{Z},\ \forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(nx) = nf(x)$.
4. On pose $a = f(1)$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = ax$.
5. Conclure.

Exercice 4

1. Démontrer, en précisant le domaine de validité, la relation : $\quad \tan(x) = \dfrac{1}{\tan(x)} - \dfrac{2}{\tan(2x)}$.
2. En déduire la limite de $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4}\right)$.

Colle 2.

Question de cours. Formules de l'arc moitié + Formules sur les sommes.

Preuve. Formules d'addiction pour cosinus, sinus et tangente.

Exercice 5

Soit $x \neq 0[2\pi]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) = \frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}.$$

Exercice 6

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Déterminer la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 7

Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $\lfloor(\sqrt{n} + \sqrt{n+1})^2\rfloor = 4n + 1$.

Exercice 8

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

1. Déterminer des réels a, b, c tels que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{a}{k} + \frac{b}{k+1} + \frac{c}{k+2}.$$
2. En déduire la valeur de S_n.

Colle 3.

Question de cours. $\sin(a-b)$ et $\tan(a-b)$ + Définition et propriétés de la valeur absolue.

Preuve. Formule du binôme de Newton.

Exercice 9

1. Simplifier $\dfrac{\cos(p) - \cos(q)}{\sin(p) + \sin(q)}$.
2. En déduire la valeur de $\tan\left(\dfrac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 10

Soit x un réel. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor x\rfloor + \lfloor 2x\rfloor + \cdots + \lfloor nx\rfloor}{n^2}$.

Exercice 11

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2\cos^2(x) + \sin(2x) - 1 = 0.$$

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer :

$$(1)\ \sum_{k=0}^{n} 2^k 3^{n-k} \qquad (2)\ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\binom{n}{k-1} \qquad (3)\ \sum_{k=0}^{n} (n-k)\binom{n}{k}$$
