

Colle 1.

Question de cours. Définition et propriétés sur le degré d'un polynôme.

Preuve. Formule de Taylor-Young.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x) - \operatorname{ch}(x))} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(e - \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)^{1/x}.$$

Exercice 2

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2 + 1)P.$$

Exercice 3

Préciser le comportement au voisinage de l'infini de la fonction $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}$.

Exercice 4

Factoriser $8X^3 - 12X^2 - 2X + 3$ sachant que ses racines sont en progression arithmétique.

Exercice 5

On pose : $\forall x > 0, f(x) = 2 \tan(x) - x$.

- Justifier que f admet une bijection réciproque impaire de classe \mathcal{C}^∞ .
- Déterminer le $DL_5(0)$ de $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.
- En déduire un $DL_6(0)$ de f^{-1} .

Colle 2.

Question de cours. Caractérisations d'une racine a de multiplicité m d'un polynôme P .

Preuve. Unicité du DL + cas des fonctions paires/impaires.

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer :

$$(nX^{n+1} - (n+1)X^n + 1) \wedge (X^n - nX + n - 1).$$

Exercice 7

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin(x)} - e^{\tan(x)}}{\sin(x) - \tan(x)} ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right)^{x^2}.$$

Exercice 8

Déterminer une CNS sur $n \in \mathbb{N}$ pour que

$$X^2 + X + 1 \mid X^{2n} + X^n + 1.$$

Exercice 9

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x} \ln \left(\frac{e^x - 1}{x} \right).$$

Exercice 10

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.

Colle 3.

Question de cours. Formules sur les développements limités usuels.

Preuve. Formule de Taylor + $P = (X - a)^r Q$ si et seulement si $P(a) = P'(a) = \dots = P^{(r-1)}(a) = 0$.

Exercice 11

Donner le $DL_4(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (1 + 2x)^{1/(1+x)} ; \quad g(x) = \sqrt{1 + \sqrt{1 + x^2}}.$$

Exercice 12

Factoriser $4X^3 - 16X^2 - 19X - 5$ sachant qu'il possède une racine multiple.

Exercice 13

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction $f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$.

Exercice 14

Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \mid b \Leftrightarrow X^a - 1 \mid X^b - 1.$$

Exercice 15

On pose : $\forall x > 0, f(x) = x + \ln(x) - 1$.

- Justifier que f réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle à préciser.
- Former le $DL_2(0)$ de f^{-1} .
- Donner un équivalent de $f^{-1}(y)$ quand $y \rightarrow +\infty$.
- Donner un équivalent de $f^{-1}(y)$ quand $y \rightarrow -\infty$.