Colle 1.

Question de cours. Familles libres/génératrices.

Preuve. Formule de Taylor-Young.

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-\operatorname{sh}(x)}{x(\cos(x)-\operatorname{ch}(x))} \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(e-\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)^{1/x}.$$

Exercice 2

Montrer que l'ensemble

$$F = \left\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid x_1+2x_2=0 \text{ et } x_1+x_2+3x_3=0\right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base.

Exercice 3

Préciser le comportement au voisinage de l'infini de

$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}.$$

Exercice 4

1. Calculer pour tout $n,m\in\mathbb{N}$ l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx.$$
2. Montrer que la famille $(x\mapsto \sin(kx))_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 5

Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que

$$P(X^2) = (X^2+1)P.$$

Colle 2.

Question de cours. Caractérisations d'une racine a de multiplicité m d'un polynôme P.

Preuve. Unicité du DL + cas des fonctions paires/impaires.

Exercice 6

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin(x)}-e^{\tan(x)}}{\sin(x)-\tan(x)} \ ; \qquad \lim_{x\to+\infty} \left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)^{x^2}.$$

Exercice 7

Montrer que la famille

$$(x\mapsto x, x\mapsto \ln(x), x\mapsto e^x)$$

est libre dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*,\mathbb{R})$.

Exercice 8

Déterminer une CNS sur $n\in\mathbb{N}$ pour que

$$X^2+X+1 \mid X^{2n}+X^n+1.$$

Exercice 9

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x-1}{x}\right).$$

Exercice 10

Soit $E = \{M\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM = {}^tMM\}$.

1. E est-il un espace vectoriel ?
2. Déterminer les formes possibles des matrices de E.
3. En déduire que E est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

Colle 3.

Question de cours. Formules sur les développements limités usuelles.

Preuve. Caractérisation d'une base.

Exercice 11

Donner le $DL_4(0)$ des fonctions suivantes :

$$f(x) = (1+2x)^{1/(1+x)} \ ; \qquad g(x) = \sqrt{1+\sqrt{1+x^2}}.$$

Exercice 12

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P\in\mathbb{R}_2[X] \mid P(1)=0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X-1, X^2-1)$ est une base de F.
3. On pose $P(X) = X^2-2X+1$. Déterminer les coordonnées de P dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 13

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}.$$

Exercice 14

On considère les suites réelles u, v, w définies par :

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_n = 2^n,\ v_n = 3^n,\ w_n = 4^n.$$

Montrer que (u,v,w) est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 15

Déterminer les polynômes $P\in\mathbb{C}[X]$ tels que $P' \mid P$.