## Colle 1.

**Question de cours.** Familles libres/génératrices.

**Preuve.** $f$ convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow \mathscr{C}_f$ au dessus de ses tangentes.

### Exercice 1

1. Montrer que la fonction $f : ]1, +\infty[ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \ln(\ln(x))$ est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :
$$\forall x, y \in ]1, +\infty[, \ \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

---

### Exercice 2

Montrer que l'ensemble
$$F = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 + 2x_2 = 0 \text{ et } x_1 + x_2 + 3x_3 = 0\right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et déterminer une base.

---

### Exercice 3

Préciser le comportement au voisinage de l'infini de
$$f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^4}{x-3}}.$$

---

### Exercice 4

1. Calculer pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ l'intégrale
$$\int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(mx)dx.$$
2. Montrer que la famille $(x \mapsto \sin(kx))_{0\leq k\leq n}$ est une famille libre de $\mathscr{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

---

## Colle 2.

**Question de cours.** Définition et caractérisation de deux sev supplémentaires.

**Preuve.** Inégalité de Jensen.

### Exercice 5

Montrer que la famille
$$(x \mapsto x, x \mapsto \ln(x), x \mapsto e^x)$$
est libre dans $\mathscr{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$.

---

### Exercice 6

Soit $f$ une fonction convexe de classe $\mathscr{C}^1$ sur $I$.

Montrer que $f$ admet un minimum absolu en un point intérieur de $I$ si et seulement si la dérivée s'annule en ce point.

---

### Exercice 7

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction
$$f(x) = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{e^x - 1}{x}\right).$$

---

### Exercice 8

Soit $E = \{M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \mid M\,{}^tM = {}^tMM\}$.

1. $E$ est-il un espace vectoriel ?
2. Déterminer les formes possibles des matrices de $E$.
3. En déduire que $E$ est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ dont on donnera une base.

---

## Colle 3.

**Question de cours.** Définition d'une fonction convexe.

**Preuve.** Caractérisation des sommes directes.

### Exercice 9

1. Soient $p, q > 0$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En utilisant la concavité de ln, montrer que :
$$\forall u, v \geq 0, \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{u^q}{q}.$$
2. Montrer que :
$$\forall x, y > 0, \quad \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

---

### Exercice 10

On considère l'ensemble $F$ défini par :
$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$$

1. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que la famille $\mathscr{B} = (X - 1, X^2 - 1)$ est une base de $F$.
3. On pose $P(X) = X^2 - 2X + 1$. Déterminer les coordonnées de $P$ dans la base $\mathscr{B}$.

---

### Exercice 11

Préciser le comportement au voisinage de 0 de la fonction
$$f(x) = \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

---

### Exercice 12

On considère les suites réelles $u$, $v$, $w$ définies par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \ u_n = 2^n, \ v_n = 3^n, \ w_n = 4^n.$$
Montrer que $(u, v, w)$ est une famille libre de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

---