

**Colle 1.**

**Question de cours.** Familles libres/génératrices.

**Preuve.** Formule de Grassmann.

**Exercice 1**

On considère

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y - z = 0\}$$

$$G = \{(a + b, a, a + 3b), a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}^3$  et déterminer une base et sa dimension.
2. Même question pour  $G$ .
3. Déterminer  $F \cap G$ .

**Exercice 2**

1. Montrer que la fonction  $f : ]1, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \ln(\ln(x))$  est concave.
2. En déduire l'inégalité suivante :

$$\forall x, y \in ]1, +\infty[, \ln\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq \sqrt{\ln(x)\ln(y)}.$$

**Exercice 3**

1. Calculer pour tout  $n, m \in \mathbb{N}$  l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx.$$

2. Montrer que la famille  $(x \mapsto \sin(kx))_{0 \leq k \leq n}$  est une famille libre de  $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

**Exercice 4**

On considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}.$$

1. Montrer que  $F$  est un sev de  $\mathbb{R}_3[X]$  et déterminer une base de  $F$ .
2. Déterminer un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}_3[X]$ .

**Colle 2.**

**Question de cours.** Définition et caractérisation de deux sev supplémentaires.

**Preuve.** Inégalité de Jensen.

**Exercice 5**

Montrer que la famille

$$(x \mapsto x, x \mapsto \ln(x), x \mapsto e^x)$$

est libre dans  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$ .

**Exercice 6**

Soit  $f$  une fonction convexe de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

Montrer que  $f$  admet un minimum absolu en un point intérieur de  $I$  si et seulement si la dérivée s'annule en ce point.

**Exercice 7**

Soit  $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ . On considère

$$F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$$

$$G = \{g \in E \mid g \text{ est affine}\}.$$

1. Montrer que  $F$  et  $G$  sont des sev de  $E$ .
2. Montrer que  $E = F \oplus G$ .

**Exercice 8**

Soit  $E = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid M {}^t M = {}^t M M\}$ .

1. En considérant  $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$  et  $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ , montrer que  $E$  n'est pas un espace vectoriel.
2. Déterminer les formes possibles des matrices de  $E$ .
3. En déduire que  $E$  est la réunion de deux sous-espaces vectoriels de  $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  dont on donnera une base.

**Colle 3.**

**Question de cours.** Définition d'une fonction convexe.

**Preuve.** Caractérisation des sommes directes.

**Exercice 9**

On considère l'ensemble  $F$  défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(1) = 0\}$$

1. Montrer que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Montrer que la famille  $\mathcal{B} = (X - 1, X^2 - 1)$  est une base de  $F$ .
3. On pose  $P(X) = X^2 - 2X + 1$ . Déterminer les coordonnées de  $P$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

**Exercice 10**

1. Soient  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . En utilisant la concavité de  $\ln$ , montrer que :

$$\forall u, v \geq 0, \quad uv \leq \frac{u^p}{p} + \frac{v^q}{q}.$$

2. Montrer que :

$$\forall x, y > 0, \quad \frac{2}{\frac{1}{x} + \frac{1}{y}} \leq \sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

**Exercice 11**

On considère les suites réelles  $u, v, w$  définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2^n, \quad v_n = 3^n, \quad w_n = 4^n.$$

Montrer que  $(u, v, w)$  est une famille libre de  $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ .