Colle 1.

Question de cours. Séries géométriques, exponentielle et de Riemann.

Preuve. Formule de Grassmann.

Exercice 1

On considère

$$F = \{P \in \mathbb{R}_3[X] \mid P(0) = P'(0) = 0\}.$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$ et déterminer une base de F.
2. Déterminer un supplémentaire de F dans $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 2

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad (2) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{2^n}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n\geq 0} (\sqrt{n^2+n}-n) \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{e^{1/n}}{n}$$

Exercice 3

On considère l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. Que peut-on en déduire ?
3. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Colle 2.

Question de cours. Rang d'une famille de vecteurs.

Preuve. Image d'une famille libre/génératrice/base par une application linéaire injective/surjective/bijective.

Exercice 4

On considère l'ensemble F défini par :

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \ \mid \ P(1) = 0\}$$

1. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Montrer que $\mathscr{B} = (X-1, X^2-1)$ est une base de F.
3. Déterminer les coordonnées de $P = X^2-2X+1$ dans la base $\mathscr{B}$.

Exercice 5

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n\geq 0} \frac{n+2^n}{3^n} \qquad (2) \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n!}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^n}{\ln(n)} \qquad (2) \sum_{n\geq 0} \ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+1}\right)$$

Exercice 6

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et f définie par :

$$\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = AMA.$$

1. (a) Montrer que f est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1}.
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Déterminer le noyau de f.
   (b) Déterminer l'image de f.

Colle 3.

Question de cours. Définition d'une application linéaire.

Preuve. Critère spécial des séries alternées.

Exercice 7

Soit $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$. On considère

$$\begin{array}{rcl} F & = & \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\} \\ G & = & \{g \in E \mid g \text{ est affine}\}. \end{array}$$

1. Montrer que les ensembles F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Montrer que $E = F \oplus G$.

Exercice 8

1. Calculer les sommes suivantes après avoir vérifié la convergence des séries :

$$(1) \sum_{n\geq 2} \ln\left(1-\frac{1}{n}\right) \qquad (2) \sum_{n\geq 0} \frac{n^2}{n!}$$

2. Déterminer la nature des séries suivantes :

$$(1) \sum_{n\geq 0} \frac{n+1}{n+2} \qquad (2) \sum_{n\geq 1} \frac{\ln(n)}{n^2}$$

Exercice 9

Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer le noyau et l'image de f.
3. f est-elle un automorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$?