Colle 1.

Question de cours. Définition et propriétés d'une probabilité.

Preuve. Théorème du rang.

Exercice 1

On considère l'application f définie par :

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(1), P'(1), P(0)) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau et l'image de f. Que peut-on en déduire ?
3. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$.
4. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 2

Dans un magasin, des machines proviennent de deux usines différentes A et B (70% viennent de A et 30% viennent de B). Parmi celles qui viennent de A, 20% présentent un défaut. Parmi celles qui viennent de B, 10% présentent un défaut.

1. Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.
2. Une machine donnée présente un défaut.

   Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Exercice 3

Soient p et q deux projecteurs tels que $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(r)$ et $\mathrm{Ker}(r)$.

Colle 2.

Question de cours. Définitions et propriétés des projecteurs.

Preuve. Propriétés d'une probabilité et probabilité d'une union..

Exercice 4

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\ f(M) = AMA$.

1. (a) Montrer que $f \in \mathscr{L}(\mathscr{M}_n(\mathbb{R}))$.
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1}.
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (a) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 5

On dispose de n urnes telles que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2. On constate que la boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que cette boule provienne de l'urne numéro 1.

Exercice 6

Soient $f, g, h \in \mathscr{L}(E)$ telles que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. En déduire que $E = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

Colle 3.

Question de cours. Définitions et propriétés des symétries.

Preuve. Caractérisation géométrique des hyperplans.

Exercice 7

Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f.

Exercice 8

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 sont égales. On prend un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité pour que ce dé ne soit pas pipé ?

Exercice 9

On considère les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ suivants :

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y = 0\}$$
$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\}.$$

1. Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^2$.
2. Donner l'expression de la projection sur F parallèlement à G.
3. Donner l'expression de la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
