

Colle 1.

Question de cours. Lois usuelles finies.

Preuve. Si $\text{rg}(f) = r$, alors il existe \mathcal{B} et \mathcal{C} telles $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_{r,n,p}$.

Exercice 1

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(1), P'(1), P(0)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 .
3. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 2

Dans un magasin, des machines proviennent de deux usines différentes A et B (70% viennent de A et 30% viennent de B). Parmi celles qui viennent de A , 20% présentent un défaut. Parmi celles qui viennent de B , 10% présentent un défaut.

1. Déterminer le pourcentage de machines dans le magasin présentant un défaut.
2. Une machine donnée présente un défaut. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'usine B ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

2. En déduire que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.

Colle 2.

Question de cours. Formules de changement de bases.

Preuve. Espérance et variance de $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket a, b \rrbracket)$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $f(M) = AMA$.

1. (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
(b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1} .
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(a) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 5

On dispose de n urnes telles que, pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, l'urne numérotée par k contient k boules blanches et $(n-k)$ boules noires. On choisit au hasard une urne et on en extrait une boule.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.
2. On constate que la boule tirée est blanche. Déterminer la probabilité que cette boule provienne de l'urne numéro 1.

Exercice 6

Soient $f, g, h \in \mathcal{L}(E)$ telles que $f \circ g = h$, $g \circ h = f$ et $h \circ f = g$.

1. Montrer que f, g, h ont même noyau et même image.
2. Montrer que $f^5 = f$.
3. En déduire que $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$.

Colle 3.

Question de cours. Définition et propriétés des matrices équivalentes.

Preuve. Espérance et variance de $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

Exercice 7

Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X]$, $f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 8

Un lot de 100 dés contient 25 dés pipés tels que la probabilité d'obtenir 6 en les lançant est $\frac{1}{2}$ et que les probabilités d'obtenir 1, 2, 3, 4 ou 5 sont égales. On prend un dé au hasard et on le lance.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 6 ?
2. On obtient 6. Quelle est la probabilité pour que ce dé soit pipé ?
3. On obtient 2. Quelle est la probabilité pour que ce dé ne soit pas pipé ?

Exercice 9

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On note X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. En déduire la loi de X .
3. Calculer l'espérance de X .