

Colle 1.

Question de cours. $\cos(a+b)$ et $\tan(a+b)$ + Définition et propriétés des coefficients binomiaux.

Preuve. Toute opération élémentaire transforme un système en un système qui lui est équivalent.

Exercice 1

1. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}^+, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad 1 - \frac{x^2}{6} \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$ puis $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$.

Exercice 2

On pose $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
2. Montrer que la fonction f est impaire.
3. Étudier les variations de la fonction f .

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :

$$2 \cos^2(x) + \sin(2x) - 1 = 0.$$

Exercice 4

1. Démontrer, en précisant le domaine de validité, la relation : $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - \frac{2}{\tan(2x)}$.
2. En déduire la limite de $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} \tan\left(\frac{1}{2^k} \frac{\pi}{4}\right)$.

Colle 2.

Question de cours. Formules de l'arc moitié + Formules sur les sommes.

Preuve. Formules d'addition pour cosinus, sinus et tangente.

Exercice 5

Soit $x \neq 0[2\pi]$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \sin(kx) = \frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right) \sin\left(\frac{nx}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Exercice 6

On pose $f(x) = x^2 + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.
On note g son application réciproque.
2. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g .

Exercice 7

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. Déterminer la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 8

On considère la fonction :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \cos^2(x) \end{cases}$$

Montrer qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et expliquer comment obtenir toute la courbe représentative de f à partir de cette étude.

Colle 3.

Question de cours. $\sin(a-b)$ et $\tan(a-b)$ + Formule du binôme de Newton.

Preuve. Formules de l'arc moitié.

Exercice 9

1. Simplifier $\frac{\cos(p) - \cos(q)}{\sin(p) + \sin(q)}$.
2. En déduire la valeur de $\tan\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

Exercice 10

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 11

On pose $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

1. Prouver que f est périodique.
2. Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2$.
3. Peut-on en déduire que $M = 2$ est un maximum de $|f|$?