

Colle 1.

Question de cours. Lois usuelles finies.

Preuve. Si $\text{rg}(f) = r$, alors il existe \mathcal{B} et \mathcal{C} telles $M_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f) = J_{r,n,p}$.

Exercice 1

On considère l'application f définie par :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto (P(1), P'(1), P(0)) \end{cases}$$

1. Montrer que f est linéaire.
2. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et \mathbb{R}^3 .
3. Justifier qu'il existe un unique polynôme P de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $P(1) = P'(1) = 1$ et $P(0) = 0$ puis le déterminer.

Exercice 2

On dispose d'une urne contenant 2 boules blanches et n ($n \in \mathbb{N}^*$) boules noires. On tire les $n + 2$ boules de l'urne successivement et sans remise. On note X le rang d'apparition de la première boule blanche tirée et Y le rang d'apparition de la seconde boule blanche tirée.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Vérifier que $\sum_{i \in X(\Omega)} \sum_{j \in Y(\Omega)} P((X = i) \cap (Y = j)) = 1$.
3. Calculer $E(XY)$, puis $\text{Cov}(X, Y)$.

Exercice 3

On tire simultanément deux boules au hasard d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On note X la variable aléatoire égale au plus grand des numéros obtenus.

1. Déterminer $P(X \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. En déduire la loi de X .
3. Calculer l'espérance de X .

Colle 2.

Question de cours. Formules de changement de bases.

Preuve. Propriétés de la covariance.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), f(M) = AMA$.

1. (a) Montrer que $f \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}))$.
(b) Montrer que, si A est inversible, alors f est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déterminer f^{-1} .
2. On suppose que $n = 2$ et $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(a) Écrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
(b) Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 5

Soit $n \geq 3$. Une urne contient une boule noire non numérotée et $n - 1$ boules blanches, dont $n - 2$ portent le numéro 0 et une porte le numéro 1. On extrait ces boules au hasard, une à une, sans remise, jusqu'à l'apparition de la boule noire. On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la boule noire.

1. Déterminer la loi de X et donner son espérance et sa variance.
2. On note Y la variable aléatoire qui vaut 1 si la boule numérotée 1 a été piochée lors de l'expérience précédente, et qui vaut 0 sinon.
(a) Montrer que, pour tout $k \in X(\Omega)$:

$$P((X = k) \cap (Y = 0)) = \frac{n - k}{n(n - 1)}$$

- (b) En déduire $P(Y = 0)$, puis reconnaître la loi de Y et donner son espérance et sa variance.

Colle 3.

Question de cours. Propriétés du groupe symétrique.

Preuve. Inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 6

Soit f définie par : $\forall P \in \mathbb{R}_2[X], f(P) = P + P'$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Écrire la matrice de f dans la base $(1, X, X^2)$.
3. Déterminer le noyau et l'image de f .

Exercice 7

Une urne contient des boules numérotées de 1 à n . On en tire deux successivement avec remise, et on note X (respectivement Y) le plus grand (respectivement le plus petit) des numéros tirés.

1. Déterminer la loi conjointe du couple (X, Y) .
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.
4. Calculer $\text{Cov}(X, Y)$.
5. X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une variable aléatoire X prenant ses valeurs dans $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Montrer que : $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

2. En déduire que $E(X) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k)$.