

Colle 1.

Question de cours. Théorème de la bijection.

Preuve. Étude des fonctions ch, sh et th et tracé des courbes représentatives.

Exercice 1

Résoudre le système suivant d'inconnu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$$

Exercice 2

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 3

On pose $f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x)$.

- Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f .
- Montrer que la fonction f est impaire.
- Étudier les variations de la fonction f .

Colle 2.

Question de cours. Fonctions paires, impaires, périodiques.

Preuve. Propriétés algébriques du logarithme.

Exercice 4

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $S_n(x) = \sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.

Exercice 5

On pose $f(x) = x^2 + \ln x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ dans un ensemble à préciser.

On note g son application réciproque.

2. Montrer que g est dérivable sur son ensemble de définition et exprimer g' en fonction de g .

Exercice 6

On pose $f(x) = \sin(x) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)$.

- Prouver que f est périodique.
- Justifier : $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq 2$.
- Peut-on en déduire que $M = 2$ est un maximum de $|f|$?

Colle 3.

Question de cours. Croissances comparées.

Preuve. Propriétés algébriques de l'exponentielle.

Exercice 7

- Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{ch}(2y) = \operatorname{ch}^2(y) + \operatorname{sh}^2(y)$.
- En déduire une formule entre $\operatorname{ch}(2y)$ et $\operatorname{sh}^2(y)$.
- On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 = -\operatorname{ch}(2y) \\ 3\ln(x) = 2\ln(\operatorname{sh}(y)) \end{cases}$$

- En posant $z = \operatorname{sh}(y)$, donner les couples (x, z) solutions du système obtenu.
- Résoudre $\operatorname{sh}(y) = 1$.
- En déduire les solutions du système posé.

Exercice 8

Pour $n \geq 1$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$.

1. Montrer que :

$$\forall x \geq 0, \quad x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.