

Colle 1.**Question de cours.** Définition et propriétés de arccos.**Preuve.** Propriétés de $e^{i\theta}$, formules d'Euler et de Moivre.**Exercice 1**

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 2

1. Soit $y \in \mathbb{R}$. Montrer que $\operatorname{ch}(2y) = \operatorname{ch}^2(y) + \operatorname{sh}^2(y)$.
2. En déduire une formule entre $\operatorname{ch}(2y)$ et $\operatorname{sh}^2(y)$.
3. On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 = -\operatorname{ch}(2y) \\ 3\ln(x) = 2\ln(\operatorname{sh}(y)) \end{cases}$$

- (a) En posant $z = \operatorname{sh}(y)$, donner les couples (x, z) solutions du système obtenu.
- (b) Résoudre $\operatorname{sh}(y) = 1$.
- (c) En déduire les solutions du système posé.

Exercice 3Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}.$$

Colle 2.**Question de cours.** Définition et propriétés de arcsin.**Preuve.** Inégalités triangulaires avec cas d'égalité.**Exercice 4**

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1, 1], T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$.
Montrer que :

$$\forall x \in [-1, 1], \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Exercice 5Résoudre le système suivant d'inconnu $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \log_y(x) + \log_x(y) = \frac{50}{7} \\ xy = 256 \end{cases}$$

Exercice 6Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $(1+i)^n + (1-i)^n$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\sum_{0 \leq 2k \leq n} (-1)^k \binom{2k}{n} = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 7Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Colle 3.**Question de cours.** Module d'un nombre complexe : définition et propriétés.**Preuve.** $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{1}{x}\right) = \operatorname{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}$.**Exercice 8**

1. On pose $A = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.

- (a) Justifier que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$.
- (b) Calculer $\tan(A)$.
- (c) En déduire A .

2. Résoudre l'équation

$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

Exercice 9

Déterminer le module et l'argument de

$$z = \sqrt{2 + \sqrt{2}} + i\sqrt{2 - \sqrt{2}}.$$

Exercice 10

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\operatorname{th}(x) = \frac{2}{\operatorname{th}(2x)} - \frac{1}{\operatorname{th}(x)}.$$

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^n 2^k \operatorname{th}(2^k x)$.