Colle 1.

Question de cours. Définition et propriétés de arccos.

Preuve. Propriétés de $e^{i\theta}$, formules d'Euler et de Moivre.

Exercice 1

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\cos(5\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$.
2. En déduire la valeur de $\cos\left(\frac{\pi}{10}\right)$.

Exercice 2

On pose respectivement S_n, T_n et U_n les sommes :

$$\sum_{0\leq 3k\leq n}\binom{n}{3k},\quad \sum_{0\leq 3k+1\leq n}\binom{n}{3k+1},\quad \sum_{0\leq 3k+2\leq n}\binom{n}{3k+2}.$$

1. Montrer que $(1+j)^n = S_n + jT_n + j^2U_n$.
2. Exprimer de même $(1+j^2)^n$ et 2^n en fonction de S_n, T_n et U_n.
3. En déduire les sommes S_n, T_n et U_n en fonction de j et n.

Exercice 3

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x+1) + \arctan(x-1) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 4

A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.

1. Établir que $|z'| = 1$, que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
2. En déduire une construction géométrique du point M'.

Colle 2.

Question de cours. Définition et propriétés de arcsin.

Preuve. Description des racines n-ième de l'unité, somme.

Exercice 5

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [-1,1], T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$. Montrer que :

$$\forall x \in [-1,1],\ \forall n \in \mathbb{N},\ T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x).$$

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $(1+i)^n + (1-i)^n$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\sum_{0\leq 2k\leq n}(-1)^k\binom{n}{2k} = (\sqrt{2})^n\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité. Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n}|z-1|$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\arctan(x) + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 9

Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (2^{\theta+1}\cos(\theta))z + 2^{2\theta} = 0.$$
2. Soit A, B les points d'affixes les racines de l'équation. Déterminer θ pour que $0AB$ soit équilatéral.

Colle 3.

Question de cours. Module d'un nombre complexe : définition et propriétés.

Preuve. $\arcsin(x) + \arccos(x) = \frac{\pi}{2}$ et $\arctan(x) + \arctan(\frac{1}{x}) = \text{signe}(x) \times \frac{\pi}{2}$.

Exercice 10

1. Résoudre (dans $\mathbb{C}$) l'équation
$$z^2 - (1+3i)z + 3i - 4 = 0.$$
2. On note M_1, M_2 les points d'affixes les racines de l'équation.

   Montrer que OM_1M_2 est isocèle rectangle.
3. Déterminer l'affixe z_3 de M_3 pour que $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

Exercice 11

1. On pose $A = \arctan(2) + \arctan(5) + \arctan(8)$.
   (a) Justifier que $\frac{3\pi}{4} < A < \frac{3\pi}{2}$.
   (b) Calculer $\tan(A)$.
   (c) En déduire A.
2. Résoudre l'équation
$$\arctan(x-3) + \arctan(x) + \arctan(x+3) = \frac{5\pi}{4}.$$

Exercice 12

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^n + 1 = 0$.

Exercice 13

Déterminer le module et l'argument de

$$z = \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$
