Colle 1.

Question de cours. Théorème d'intégration par parties.

Preuve. Résolution d'une équation du second degré à coefficients complexes.

Exercice 1
Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad (2) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

Exercice 2
On pose respectivement S_n, T_n et U_n les sommes :

$$\sum_{0\le 3k\le n}\binom{n}{3k}, \quad \sum_{0\le 3k+1\le n}\binom{n}{3k+1}, \quad \sum_{0\le 3k+2\le n}\binom{n}{3k+2}.$$

1. Montrer que $(1+j)^n = S_n + jT_n + j^2U_n$.
2. Exprimer de même $(1+j^2)^n$ et 2^n en fonction de S_n, T_n et U_n.
3. En déduire S_n, T_n et U_n en fonction de j et n.

Exercice 3
On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-2x^3}{(1+x^3)^2}dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une IPP, que : $I = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}J$.
2. Déterminer la valeur de I puis celle de J.

Exercice 4
A tout point M d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{z-1}{1-\overline{z}}$.

1. Établir que $|z'| = 1$, que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est réel et que $\dfrac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur.
2. En déduire une construction géométrique du point M'.

Colle 2.

Question de cours. Formes complexes d'une translation, d'une homothétie et d'une rotation.

Preuve. Description des racines n-ième de l'unité, somme.

Exercice 5
Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t \qquad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$$

Exercice 6
Soit $n \in \mathbb{N}$. En calculant $(1+i)^n + (1-i)^n$ de deux manières différentes, montrer que :

$$\sum_{0\le 2k\le n} (-1)^k \binom{n}{2k} = (\sqrt{2})^n \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

Exercice 7
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \Leftrightarrow f \text{ garde un signe constant sur } [a,b].$$

Exercice 8
Soit $\theta \in [0, 2\pi[$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$$z^2 - (2^{\theta+1}\cos(\theta))z + 2^{2\theta} = 0.$$
2. Soit A, B les points d'affixes les racines de l'équation.
   Déterminer θ pour que $0AB$ soit équilatéral.

Colle 3.

Question de cours. Module d'un nombre complexe : définition et propriétés.

Preuve. Linéarité, relation de Chasles, inversion des bornes, positivité et croissance de l'intégrale.

Exercice 9
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ième de l'unité.
Calculer $\displaystyle\sum_{z\in\mathbb{U}_n} |z-1|$.

Exercice 10
1. Montrer que :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 11
1. Résoudre (dans $\mathbb{C}$) l'équation
$$z^2 - (1+3i)z + 3i - 4 = 0.$$
2. On note M_1, M_2 les points d'affixes les racines de l'équation.
   Montrer que OM_1M_2 est isocèle rectangle.
3. Déterminer l'affixe z_3 de M_3 pour que $OM_1M_2M_3$ soit un carré.

Exercice 12
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.