Colle 1.

Question de cours. Théorème d'intégration par parties.

Preuve. Division euclidienne.

Exercice 1
Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a \mid b$ si et seulement si $a^2 \mid b^2$.

Exercice 2
Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_0^1 \ln(1+t^2)\,\mathrm{d}t \qquad (2) \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{\sin(t)}$$

Exercice 3
1. Montrer si p, $p+2$, $p+4$ sont des nombres premiers, alors $p=3$.
2. En déduire que 5 est le seul nombre premier qui est la somme et la différence de nombres premiers.

Exercice 4
On pose $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{x-1}{1+x^3}dx$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^4-2x^3}{(1+x^3)^2}dx$.

1. Montrer, à l'aide d'une IPP, que : $I = -\dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{2}J$.
2. Déterminer la valeur de I puis celle de J.

Colle 2.

Question de cours. Définition et propriétés du PGCD.

Preuve. Petit théorème de Fermat.

Exercice 5
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$.

Exercice 6
Calculer les intégrales suivantes :

$$(1) \int_1^{e^\pi} \sin(\ln(t))\,\mathrm{d}t \qquad (2) \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}t}{2+\sin(t)}$$

Exercice 7
Déterminer a et b entiers naturels tels que $a \wedge b = 5$ et $a \vee b = 60$.

Exercice 8
Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et f une fonction continue sur $[a,b]$. Montrer que :

$$\left|\int_a^b f\right| = \int_a^b |f| \ \Leftrightarrow\ f \text{ garde un signe constant sur } [a,b].$$

Colle 3.

Question de cours. Définition et propriétés du PPCM.

Preuve. Linéarité, relation de Chasles, inversion des bornes, positivité et croissance de l'intégrale.

Exercice 9
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $162x + 207y = 27$.

Exercice 10
1. Montrer que :
$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}.$$
2. En déduire $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}+t}$.

Exercice 11
Déterminer a et b entiers naturels tels que $ab = 1008$ et $a \vee b = 168$.

Exercice 12
Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n x^n e^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
