Colle 1.

Question de cours. Définition et propriétés du PGCD.

Preuve. Résolution de l'équation homogène pour une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients non constants.

Exercice 1

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$. Montrer que $a \mid b$ si et seulement si $a^2 \mid b^2$.

Exercice 2

Résoudre dans $\mathbb{R}_+^*$ l'équation

$$(1+x^2)y' + 2xy = \frac{1}{x}.$$

Exercice 3

1. Montrer si p, $p+2$, $p+4$ sont des nombres premiers, alors $p = 3$.
2. En déduire que 5 est le seul nombre premier qui est la somme et la différence de nombres premiers.

Exercice 4

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système

$$\begin{cases} y'' + t = \cos^2(x) \\ y'(0) = y(0) = 0 \end{cases}$$

Colle 2.

Question de cours. Principe de superposition

Preuve. Petit théorème de Fermat.

Exercice 5

Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ 5 \mid 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle

$$xy' + y = \frac{2x}{x^2+1}.$$

1. Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ et $]-\infty, 0[$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Déterminer a et b entiers naturels tels que $a \wedge b = 5$ et $a \vee b = 60$.

Exercice 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ le système différentiel :

$$\begin{cases} x' = x + y \\ y' = 3x - y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x(0) = 2 \\ y(0) = -2 \end{cases}$$

Colle 3.

Question de cours. Définition et propriétés du PPCM.

Preuve. Résolution de l'équation homogène pour une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (dans $\mathbb{C}$).

Exercice 9

Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $162x + 207y = 27$.

Exercice 10

Résoudre sur $]-1, +\infty[$ l'équation

$$(t+1)y' + y = (t+1)\sin(t).$$

Exercice 11

Déterminer a et b entiers naturels tels que $ab = 1008$ et $a \vee b = 168$.

Exercice 12

Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation $y'' + 2y' + 5y = 5\cos(t)$.
