

Correction - DM 1

A rendre le Vendredi 19 Septembre

Exercice 1

1. Pour (E_1) :

$$\begin{aligned}
 (E_1) &\Leftrightarrow \frac{5}{3-x} - 3 + \frac{x+4}{3} = 0 \Leftrightarrow \frac{15 - 9(3-x) + (x+4)(3-x)}{3(3-x)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \frac{15 - 27 + 9x + 3x - x^2 + 12 - 4x}{3(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2 + 8x}{3(3-x)} = 0 \Leftrightarrow \frac{x(8-x)}{3(3-x)} = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = 8 \\ x \neq 3 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S}_1 = \{0, 8\}$.

Pour (E_2) : On détermine les valeurs frontières de chaque valeur absolue :

$$x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \quad \text{et} \quad 5 - x = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Alors :

- Si $x \in]-\infty, -2]$,

$$(E_2) \Leftrightarrow -(x+2) = (5-x) + 1 \Leftrightarrow -x + x = 2 + 5 + 1 \Leftrightarrow 0 = 8.$$

Cette dernière équation est impossible. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

- Si $x \in [-2, 5]$,

$$(E_2) \Leftrightarrow (x+2) = (5-x) + 1 \Leftrightarrow 2x = 4 \Leftrightarrow x = 2.$$

Comme $2 \in [-2, 5]$, on conserve cette solution.

- Si $x \in [5, +\infty[$,

$$(E_2) \Leftrightarrow (x+2) = -(5-x) + 1 \Leftrightarrow x - x = -2 - 5 + 1 \Leftrightarrow 0 = -6.$$

Cette dernière équation est impossible. Il n'y a donc pas de solution dans ce cas.

Finalement, l'ensemble des solutions de (E_2) est $\mathcal{S}_2 = \{2\}$.

2. Pour (I_1) :

$$(I_1) \Leftrightarrow \frac{2x-3}{(x+2)(x-2)} - \frac{(x-2)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{(2x-3) - (x-2)}{(x+2)(x-2)} < 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+2)(x-2)} < 0.$$

On fait un tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$
$x - 1$		$-$	0	$+$	
$x + 2$	$-$	0		$+$	
$x - 2$			$-$	0	$+$
$\frac{x - 1}{(x + 2)(x - 2)}$	$-$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, l'ensemble des solutions de (I_1) est $\mathcal{S}_1 =]-\infty, -2[\cup]1, 2[$.

Pour (I_2) : On détermine les valeurs frontières de la valeur absolue : $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$. Alors :

- Si $x \in]-\infty, 3]$,

$$(I_2) \Leftrightarrow -(x - 3) \geq 4x + 1 \Leftrightarrow -x - 4x \geq 1 - 3 \Leftrightarrow -5x \geq -2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{5}.$$

Comme $x \in]-\infty, 3]$, les solutions dans ce cas sont $] -\infty, \frac{2}{5}]$.

- Si $x \in [3, +\infty[$,

$$(I_2) \Leftrightarrow (x - 3) \geq 4x + 1 \Leftrightarrow -3x \geq 4 \Leftrightarrow x \leq -\frac{4}{3}$$

Pour tout $x \in [3, +\infty[$, la condition $x \leq -\frac{4}{3}$ est impossible et il n'y a donc pas de solution.

Finalement, l'ensemble des solutions de (I_2) est $\mathcal{S}_2 =]-\infty, \frac{2}{5}]$.

Exercice 2

1.

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{3n} k^2 &= \sum_{i=0}^{2n} (i+n)^2 = \sum_{i=0}^{2n} i^2 + 2n \sum_{i=0}^{2n} i + \sum_{i=0}^{2n} n^2 \\ &= \frac{(2n)(2n+1)(4n+1)}{6} + 2n \frac{(2n)(2n+1)}{2} + n^2(2n+1) \\ &= n(2n+1) \left(\frac{4n+1}{3} + 2n+2 \right) = \frac{n(2n+1)(10n+7)}{3}. \end{aligned}$$

2.

$$\sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}} = 10 \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{5} \right)^k = 10 \times \left(\frac{4}{5} \right)^1 \times \frac{1 - \left(\frac{4}{5} \right)^n}{1 - \frac{4}{5}} = 40 - 40 \left(\frac{4}{5} \right)^n.$$

3.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} \times \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} \\ &= \sum_{k=1}^n (\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = (\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \dots + (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\ &= \sqrt{n+1} - 1. \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{2^{n-k}} &= \sum_{k=1}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{k}{2^{n-k}} = \sum_{k=1}^n \frac{n \times (n-1)!}{(k-1)!((n-1)-(k-1))!} \frac{1}{2^{n-k}} \\ &= n \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k} = n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1-j} = n \left(\frac{3}{2} \right)^{n-1}. \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n-1} k(n-k) \frac{n!}{k!(n-k)!} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n!}{(k-1)!(n-k-1)!} \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{(k-1)!((n-2)-(k-1))!} = n(n-1) \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-2}{k-1} \\
&= n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \binom{n-2}{j} 1^j 1^{n-2-j} = n(n-1) 2^{n-2}.
\end{aligned}$$

6.

$$\begin{aligned}
\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} ij &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^j ij \right) = \sum_{j=1}^n \left(j \sum_{i=1}^j i \right) = \sum_{j=1}^n \left(j \times \frac{j(j+1)}{2} \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{j=1}^n j^3 + \sum_{j=1}^n j^2 \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right) = \frac{3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n(n+1) + 2(2n+1))}{24} = \frac{n(n+1)(3n^2 + 3n + 4n + 2)}{24} \\
&= \frac{n(n+1)(3n^2 + 7n + 2)}{24}.
\end{aligned}$$

Exercice 3

1. La formule de Pascal entraîne que pour tout entier k compris entre $p+1$ et n :

$$\binom{k}{p} + \binom{k}{p+1} = \binom{k+1}{p+1}.$$

Par conséquent, pour tout entier $k \in \llbracket p+1; n \rrbracket$:

$$\binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1}.$$

Sachant que $\binom{p}{p} = 1$, on obtient :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = 1 + \sum_{k=p+1}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right].$$

2. On remarque que la somme $\sum_{k=p+1}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right]$ est télescopique. Par conséquent :

$$\sum_{k=p+1}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right] = \binom{n+1}{p+1} - \binom{p+1}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - 1.$$

On en déduit finalement que :

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}.$$

3. (a) Par symétrie :

$$\forall k \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

(b) Par application de la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k \quad \text{et} \quad g_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k.$$

Le terme de degré n de la fonction f_n est égal à $\binom{2n}{n} x^n$. Ainsi le coefficient de degré n de f_n est égal à $\binom{2n}{n}$.

4. (a) En développant le produit, on obtient :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{\ell=0}^n a_k b_\ell x^{k+\ell} \right).$$

Le changement d'indice $i = k + \ell$ dans la somme intérieure donne :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{n+k} a_k b_{i-k} x^i \right).$$

(b) Il s'agit d'échanger les symboles σ de la somme double obtenue à la question précédente. La somme en jeu est une somme de la forme

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i} \right).$$

Comme suggéré, on doit ranger les termes de la somme double dans un tableau à $n+1$ lignes (l'indice k décrivant l'intervalle entier $\llbracket 0; n \rrbracket$) et $2n+1$ lignes puisque les valeurs atteintes par l'indice i sont dans l'intervalle entier $\llbracket 0; 2n \rrbracket$:

	$i = 0$		$i = k$		$i = n$		$i = k + n$		$i = 2n$
$k = 0$	$u_{0,0}$	$\cdots$	$u_{0,k}$	$\cdots$	$u_{0,n}$				
$\vdots$		$\ddots$				$\ddots$			
k			$u_{k,k}$	$\cdots$	$u_{k,n}$	$\cdots$	$u_{k,k+n}$		
$\vdots$				$\ddots$				$\ddots$	
$k = n$					$u_{n,n}$	$\cdots$	$u_{n,k+n}$	$\cdots$	$u_{n,n}$

Au vu du tableau ci-dessus :

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i} \right) = \sum_{i=0}^n \left(\sum_{k=0}^i u_{k,i} \right) + \sum_{i=n+1}^{2n} \left(\sum_{k=i-n}^n u_{k,i} \right).$$

Par ailleurs, on remarque que

$$\max(i-n, 0) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \leq n \\ i-n & \text{si } i > n \end{cases} ; \quad \min(i, n) = \begin{cases} i & \text{si } i \leq n \\ n & \text{si } i > n \end{cases}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{k+n} u_{k,i} \right) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(i-n, 0)}^{\min(i, n)} u_{k,i} \right).$$

Le résultat obtenu appliqué au produit $\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right)$ conduit à :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(i-n, 0)}^{\min(n, i)} a_k b_{i-k} \right) x^i.$$

5. En appliquant la formule précédente, on obtient :

$$g_n(x) \times g_n(x) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} \binom{n}{k} \binom{n}{i-k} \right) x^i.$$

6. D'après la question 3.(b), le coefficient de degré n de f_n est égal à $\binom{2n}{n}$. Or la question précédente entraîne que le coefficient de degré n de f_n est égal à :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}.$$

Par conséquent :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

compte-tenu de la question 3.(a).
