A rendre le Vendredi 19 Septembre

Exercice 1

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$(E_1) : \frac{5}{3-x} = 3 - \frac{x+4}{3}$$

$$(E_2) : |x+2| = |5-x| + 1$$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

$$(I_1) : \frac{2x-3}{x^2-4} < \frac{1}{x+2}$$

$$(I_2) : |x-3| \geq 4x+1$$

Exercice 2

Calculer les sommes suivantes ($n \in \mathbb{N}^*$) :

$$(1) \sum_{k=n}^{3n} k^2$$

$$(2) \sum_{k=1}^n \frac{2^{2k+1}}{5^{k-1}}$$

$$(3) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

$$(4) \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{2^{n-k}}$$

$$(5) \sum_{k=0}^n k(n-k) \binom{n}{k}$$

$$(6) \sum_{0 \leq i \leq j \leq n} \binom{j}{i}$$

Exercice 3

Partie A : Une première somme faisant apparaître un télescope.

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n \geq p$. On se propose de calculer

$$S_{p,n} = \sum_{k=p}^n \binom{k}{p}.$$

1. Montrer que :

$$S_{p,n} = 1 + \sum_{k=p+1}^n \left[\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} \right].$$

2. En faisant apparaître un télescope, en déduire la valeur de $S_{p,n}$.

Partie B : Une expression du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$.

Dans cette partie, on se propose d'établir que pour tout entier naturel n :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$$

À cette fin, on considère les fonctions polynomiales $f_n : x \mapsto (1+x)^{2n}$ et $g_n : x \mapsto (1+x)^n$.

3. Remarques préliminaires.

(a) Justifier que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$.

(b) Développer les fonctions f_n et g_n . Quel est le coefficient de degré n de f_n ?

4. Développement de deux fonctions polynomiales de degré n .

Soient $x \mapsto a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ et $x \mapsto b_0 + b_1x + \dots + b_nx^n$ deux fonctions polynomiales de degré n .

(a) Établir que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{i=k}^{n+k} a_k b_{i-k} x^i \right).$$

(b) En déduire que pour tout réel x :

$$\left(\sum_{k=0}^n a_k x^k \right) \left(\sum_{\ell=0}^n b_\ell x^\ell \right) = \sum_{i=0}^{2n} \left(\sum_{k=\max(i-n,0)}^{\min(n,i)} a_k b_{i-k} \right) x^i.$$

On pourra s'aider d'un tableau afin de disposer les éléments de la famille $(a_k b_{i,k})_{k,i}$ doublement indexée.

5. À l'aide de la question précédente, développer $g_n(x) \times g_n(x)$.

6. En déduire la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$