

A rendre le 13/03/26

Exercice 1

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $I_n =]-\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi[$ et $g_n : x \in I_n \mapsto \tan(x) - x$. La fonction g_n est continue et dérivable sur I_n , et pour tout $x \in I_n$, $g'_n(x) = \tan^2(x) > 0$, et $g'_n(n\pi) = 0$. Elle est donc strictement croissante sur I_n , et $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2} + n\pi} g_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2} + n\pi} g_n(x) = -\infty$.

Par le théorème de la bijection, g_n réalise une bijection de I_n sur \mathbb{R} . L'équation $g_n(x) = 0$ admet donc une unique solution sur I_n qu'on notera x_n .

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-\frac{\pi}{2} + n\pi \leq x_n \leq \frac{\pi}{2} + n\pi$ par définition de x_n , d'où $-\frac{1}{2n} + 1 \leq \frac{x_n}{n\pi} \leq \frac{1}{2n} + 1$. Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n\pi}$ existe et vaut 1. En d'autres termes, $x_n \sim n\pi$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $y_n = x_n - n\pi$. Par la question précédente, $y_n = o(n\pi)$, et $y_n \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Par π -périodicité de \tan :

$$\tan(y_n) = \tan(x_n - n\pi) = \tan(x_n) = x_n$$

par définition de x_n . En appliquant \arctan (bijection réciproque de \tan restreinte à I_0), on obtient :

$$y_n = \arctan(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \pi/2 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty.$$

D'où $y_n \sim \frac{\pi}{2}$ et $y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons à présent $z_n = y_n - \frac{\pi}{2} = o(1)$. Alors :

$$\tan(z_n) = \tan\left(y_n - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{-1}{\tan(y_n)} = \frac{-1}{x_n} \sim \frac{-1}{n\pi}.$$

Or $z_n = o(1)$, donc $\tan(z_n) \sim z_n$. Ainsi, $z_n \sim \frac{-1}{n\pi}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Cherchons un équivalent de $t_n = x_n - n\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{1}{n\pi} = z_n + \frac{1}{n\pi}$. Par la question précédente, $t_n = o\left(\frac{1}{n\pi}\right)$. Calculons :

$$\tan(t_n) = \tan\left(z_n + \frac{1}{n\pi}\right) = \frac{\tan(z_n) + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}{1 - \tan(z_n)\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}$$

Or $1 - \tan(z_n)\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) \rightarrow 1$, donc $1 - \tan(z_n)\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) \sim 1$. D'autre part :

$$\begin{aligned} \tan(z_n) + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) &= -\frac{1}{x_n} + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2} + o(1)} + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \frac{1}{1 + \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)} + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= -\frac{1}{n\pi} \left(1 - \frac{1}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) + \frac{1}{n\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\tan(t_n) = \frac{\tan(z_n) + \tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)}{1 - \tan(z_n)\tan\left(\frac{1}{n\pi}\right)} \sim \frac{1}{2n^2\pi}.$$

Comme enfin $\tan(t_n) \sim t_n$ car $t_n = o(1)$, on en déduit finalement que $t_n \sim \frac{1}{2n^2\pi}$, soit que $t_n - \frac{1}{2n^2\pi} = o\left(\frac{1}{2n^2\pi}\right)$. En conclusion :

$$x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{1}{2n^2\pi} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein et théorème de Weierstrass)

Partie I. Fonctions uniformément continues et théorème de Heine

1. Supposons $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uniformément continue sur I . Soit $a \in I$ et soit $\varepsilon > 0$. Puisque f est uniformément continue, il existe $\eta > 0$ tel que :

$$\forall (x, y) \in I^2, |x - y| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$|x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Donc f est continue en a . Ceci étant valable pour tout $a \in I$, f est continue sur I .

2. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Par hypothèse, il existe $(x_n, y_n) \in I^2$ tel que :

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ et } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon.$$

D'où l'existence de deux telles suites $(x_n)_{n \geq 1}$ et $(y_n)_{n \geq 1}$ à valeurs dans I

- (b) Puisque (x_n) est une suite bornée (I étant un segment), on peut en extraire une sous-suite convergente : il existe une extractrice $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ et un réel $c \in I$ tels que $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = c$.

Par construction, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}| < \frac{1}{\varphi(n)}.$$

Puisque $\varphi : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ est strictement croissante, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\varphi(n)} = 0$. Par théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} - y_{\varphi(n)}$ existe et vaut 0. Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_{\varphi(n)} = c$, il suit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} y_{\varphi(n)} = c.$$

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$|f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| \geq \varepsilon.$$

Mais puisque f est continue, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f(x_{\varphi(n)}) - f(y_{\varphi(n)})| = |f(c) - f(c)| = 0$. Par passage à la limite dans les inégalités, il en résulte $0 \geq \varepsilon$. D'où une contradiction.

On a donc démontré le *théorème de Heine* : si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est continue sur un **segment** $[a, b]$, alors elle est uniformément continue sur $[a, b]$.

Partie II. Polynômes de Bernstein

3. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par opération sur le degré d'un polynôme :

$$\deg(B_{n,k}) = \deg(X^k) + \deg((1 - X)^{n-k}) = k + (n - k) = n.$$

De plus, $B_{n,k}$ est scindé, ses racines sont 0 et 1, de multiplicités respectives k et $(n - k)$.

4. (a) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Supposons qu'il existe $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que :

$$P = \sum_{k=0}^n \lambda_k B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \mu_k B_{n,k}. \quad (*)$$

Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Puisque 0 est racine de multiplicité k exactement de $B_{n,k}$:

$$B_{n,k}(0) = \dots = B_{n,k}^{(k-1)}(0) = 0 \text{ et } B_{n,k}^{(k)}(0) \neq 0.$$

En évaluant (*) en 0, on obtient donc :

$$\lambda_0 B_{n,0}(0) = \mu_0 B_{n,0}(0).$$

Puisque $B_{n,0}(0) = 0$, il vient que $\lambda_0 = \mu_0$. Ainsi :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k B_{n,k} = \sum_{k=1}^n \mu_k B_{n,k}$$

Dérivons cette expression, puis évaluons-là en 0 :

$$\sum_{k=1}^n \lambda_k B'_{n,k}(0) = \sum_{k=1}^n \mu_k B'_{n,k}(0), \text{ qui se réécrit } \lambda_1 B'_{n,1}(0) = \mu_1 B'_{n,1}(0).$$

Puisque $B'_{n,1}(0) \neq 0$, il vient que $\lambda_1 = \mu_1$. On peut poursuivre ainsi en dérivant successivement et en évaluant en 0. De proche en proche, on obtient $\lambda_2 = \mu_2$, puis $\lambda_3 = \mu_3$, jusqu'à $\lambda_n = \mu_n$.

Ainsi, un tel $(n+1)$ -uplet $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, s'il existe, est unique.

- (b) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Par la formule du binôme :

$$\begin{aligned} X^k &= X^k (X + (1 - X))^{n-k} = X^k \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^j (1 - X)^{n-k-j} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} X^{j+k} (1 - X)^{n-k-j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\binom{n-k}{j}}{\binom{n}{j+k}} B_{n,j+k} \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(n-k)! \times (j+k)! \times (n-j-k)!}{j! \times (n-k-j)! \times n!} B_{n,j+k} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(j+k)!}{j! \times k!} B_{n,j+k} = \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k}{k} B_{n,j+k} \\ &= \frac{1}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} B_{n,j}. \end{aligned}$$

- (c) Soit $P = \sum_{k=0}^n a_k X^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Par la question précédente :

$$P = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{\binom{n}{k}} \sum_{j=k}^n \binom{j}{k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^n \underbrace{\left(\sum_{k=0}^j \frac{\binom{j}{k}}{\binom{n}{k}} a_k \right)}_{\lambda_j} B_{n,j}.$$

D'où l'existence de $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{j=0}^n \lambda_j B_{n,j}$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par la formule du binôme de Newton :

$$\sum_{k=0}^n B_{n,k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = (X + (1-X))^n \boxed{= 1.}$$

De même si $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k B_{n,k} &= \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n \binom{n-1}{k-1} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^{k+1} (1-X)^{n-1-k} = nX(X + (1-X))^{n-1} \boxed{= nX.} \end{aligned}$$

Et cette égalité est encore valable si $n = 0$. Enfin si $n \geq 2$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n k(k-1) B_{n,k} &= \sum_{k=2}^n k(k-1) \binom{n}{k} X^k (1-X)^{n-k} = \sum_{k=2}^n n(n-1) \binom{n-2}{k-2} X^k (1-X)^{n-k} \\ &= n(n-1) \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} X^{k+2} (1-X)^{n-2-k} = n(n-1) X^2 (X + (1-X))^{n-2} \\ &\boxed{= n(n-1) X^2.} \end{aligned}$$

Et cette égalité est là aussi valable lorsque $n = 0$ ou 1 .

6. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculons :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (k - nX)^2 B_{n,k} &= \sum_{k=0}^n k^2 B_{n,k} - 2nX \sum_{k=0}^n k B_{n,k} + n^2 X^2 \sum_{k=0}^n B_{n,k} \\ &= \sum_{k=0}^n [k(k-1) + k] B_{n,k} - 2n^2 X^2 + n^2 X^2 \\ &= n(n-1) X^2 + nX - n^2 X^2 = -nX^2 + nX \\ &\boxed{= nX(1-X).} \end{aligned}$$

Partie III. Approximation uniforme d'une fonction continue

7. Soit $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$f(x) - [B_n(f)](x) = f(x) \sum_{k=0}^n B_{n,k}(x) - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) B_{n,k}(x) \boxed{= \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x).}$$

8. (a) Pour tout $k \in A_x$, $|x - \frac{k}{n}| < \eta$ et par continuité uniforme de f :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| < \varepsilon.$$

Dès lors :

$$\sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in A_x} \varepsilon B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in [0, n]} \varepsilon B_{n,k}(x) \boxed{= \varepsilon.}$$

Remarque. L'inégalité stricte n'est pas forcément nécessaire pour la suite (la définition de la limite pouvant s'écrire avec une inégalité stricte ou large), et on pourrait de fait ne pas s'embêter ici. Mais elle est demandée par l'énoncé. Tentons de la justifier :

- L'inégalité est bien stricte si $A_x = \emptyset$ car cela donne alors $0 < \varepsilon$. De même, si $A_x \neq \emptyset$ et $x \neq 0$ ou 1 , $B_{n,k}(x) \neq 0$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, et la première inégalité ci-dessus est bien stricte.
- Si $x = 0$, alors $0 \in A_x$ et :

$$\left| f(0) - f\left(\frac{0}{n}\right) \right| B_{n,k}(0) = 0 < \varepsilon \underbrace{B_{n,0}(0)}_{\neq 0}.$$

Et donc l'inégalité est bien stricte. On procède de même pour $x = 1$.

- (b) Soit $k \in B_x$. Par définition de B_x , $|x - \frac{k}{n}| \geq \eta$ et donc :

$$\eta^2 \sum_{k \in B_x} B_{n,k}(x) \leq \sum_{k \in B_x} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x).$$

D'autre part :

$$\sum_{k \in B_x} \left(x - \frac{k}{n}\right)^2 B_{n,k}(x) = \frac{1}{n^2} \sum_{k \in B_x} (nx - k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{n} x(1-x)$$

par la question 6. Enfin, grâce à l'inégalité classique¹ $x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, on obtient :

$$\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n (nx - k)^2 B_{n,k}(x) \leq \frac{1}{4n}.$$

- (c) Par l'inégalité triangulaire :

$$\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \|f\|_\infty + \|f\|_\infty = 2\|f\|_\infty.$$

Ainsi, à l'aide de la question précédente :

$$\sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \leq 2\|f\|_\infty \sum_{k \in B_x} B_{n,k}(x) \leq \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

- (d) Par la question 7 et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} |f(x) - [B_n(f)](x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) B_{n,k}(x) \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) \\ &= \sum_{k \in A_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x) + \sum_{k \in B_x} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| B_{n,k}(x). \end{aligned}$$

Par les questions 8.(a) et 8.(c) :

$$|f(x) - [B_n(f)](x)| < \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

¹Qu'on retrouvera par étude de fonction, ou en remarquant que la fonction polynomiale $x \mapsto x(1-x)$ est de degré 2, avec 0 et 1 pour racines et -1 pour coefficient dominant, et donc atteint son maximum en $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ qui vaut $\frac{1}{4}$

Cette majoration **ne dépend pas** de x . Ainsi, $\varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}$ est un majorant de $\{|f(x) - [B_n(f)](x)|, x \in [0, 1]\}$. Par comparaison d'un majorant au plus petit d'entre eux :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty \leq \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

Remarque. Ici aussi, on aurait pu se contenter de l'inégalité large, puisque la définition de limite l'autorise. Mais l'énoncé exige une inégalité stricte. Pour l'obtenir, utilisons le théorème des bornes atteintes : $x \mapsto |f(x) - [B_n(f)](x)|$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$. Elle est donc bornée et atteint ses bornes, de sorte qu'il existe $x_0 \in I$ tel que :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty = |f(x_0) - [B_n(f)](x_0)| < \varepsilon + \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2}.$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} = 0$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$, $\frac{\|f\|_\infty}{2n\eta^2} \leq \varepsilon$.

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on obtient :

$$\|f - B_n(f)\|_\infty < 2\varepsilon.$$

D'où le résultat voulu, qui se récrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f - B_n(f)\|_\infty = 0$.