Correction - DM 12

A rendre le 05/05/26

Exercice 1

1. Rappelons le développement limité usuel :

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Par produit, il vient :

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{x}{2}\right)\ln(1+x) &\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^3\right) + o(x^3) \\ &\underset{x\to 0}{=} x + \frac{1}{12}x^3 + o(x^3)\end{aligned}$$

soit finalement :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{12}x^3 + o(x^3).$$

Ce qui donne :

$$\boxed{f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3.}$$

2. Par définition :

$$u_{n+1} = \frac{(n+1)^{n+3/2}}{(n+1)!e^{n+1}}.$$

Et comme $u_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{(n+1)!e^{n+1}} \times \frac{n!e^n}{n^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{n!}{(n+1)!} \times \frac{e^n}{e^{n+1}} \\ &= \frac{(n+1)^{n+\frac{3}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{n+1} \times \frac{1}{e} = \frac{(n+1)^{n+\frac{1}{2}}}{n^{n+\frac{1}{2}}} \times \frac{1}{e} \boxed{= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e}.}\end{aligned}$$

3. Par définition, $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$. Des résultats précédents, on déduit donc que :

$$v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, l'équivalent $f(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{12}x^3$ donne $f\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^3}$.

Et comme $v_n = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, on obtient donc :

$$\boxed{v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.}$$

La série $\sum \frac{1}{12n^2}$ est positive convergente (série de Riemann avec $\alpha = 2$), et $v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}$. D'après le théorème de comparaison, $\boxed{\sum v_n \text{ converge.}}$

4. La série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ converge, donc la suite de terme général $\ln(u_n)$ converge. Notons ℓ sa limite.

Par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, il vient $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = e^{\ell} \in \mathbb{R}_+^*$, c'est-à-dire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n} = e^{\ell}$. Ainsi, $\boxed{n! \underset{n\to+\infty}{\sim} e^{-\ell}n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}, \text{ qui est l'équivalent souhaité avec } \lambda = e^{-\ell} \in \mathbb{R}_+^*.}$

5. De l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}$, on tire, d'une part :

$$(2n)! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda(2n)^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n} = \lambda 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}.$$

D'autre part, en multipliant par 2^n et en élevant au carré :

$$(2^n n!)^2 \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda^2 2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}.$$

Il vient alors :

$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\lambda 2^{2n+\frac{1}{2}}n^{2n+\frac{1}{2}}e^{-2n}}{\lambda^2 2^{2n}n^{2n+1}e^{-2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{2}}{\lambda\sqrt{n}}$$

soit enfin, en utilisant l'équivalent complet donné:

$$\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$

Ainsi, le quotient de ces deux expressions tend vers 1. Et c'est en fait une constante, car les n se simplifient :

$$\frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \div \sqrt{\frac{\pi}{4n}} = \frac{\pi}{\lambda\sqrt{2n}} \times \frac{2\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda}$$

ce qui donne finalement $\boxed{\lambda = \sqrt{2\pi}}$. Ceci permet de récrire la formule :

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Exercice 2
Partie I. Matrices de Vandermonde.

1. (a) Supposons les complexes $x_0, \dots, x_k$ tous distincts. Soit $i \in [\![0,k]\!]$. La $(i+1)$-ème ligne de l'égalité matricielle $V(x_0, \dots x_k)X = 0_n$ s'écrit :

$$a_0 + a_1 x_i + \cdots + a_k x_i^k = 0.$$

Ainsi, le polynôme P admet $k+1$ racines distinctes $x_0, \dots, x_k$. Puisque $\deg(P) \leq k$, P est le polynôme nul, et donc $a_0, \dots, a_k = 0$ et $X = 0_{k+1,1}$. Par l'une des caractérisations de l'inversibilité obtenue en cours, $\boxed{V(x_0, \dots x_k) \text{ est inversible.}}$

(b) On raisonne par contraposition en supposant qu'il existe $i < j$ dans $[\![0,k]\!]$ tels que $x_i = x_j$. Les lignes L_{i+1} et L_{j+1} de $V(x_0, \dots, x_k)$ sont dans ce cas égales. Par l'opération élémentaire $L_j \leftarrow L_j - L_i$, $V(x_0, \dots, x_k)$ est équivalente par ligne à une matrice possédant une ligne nulle. Une telle matrice étant non inversible (vu en cours) et les opérations élémentaires préservant l'inversibilité, $V(x_0, \dots, x_k)$ n'est pas inversible.

Ainsi, $\boxed{\text{si } V(x_0, \dots, x_k) \text{ est inversible, alors } x_0, \dots, x_k \text{ sont distincts.}}$

✍ À retenir. Matrices de Vandermonde

On vient d'établir le résultat suivant, à connaître et au programme de MP2I :

$$V(x_0, \dots, x_k) \text{ est inversible} \quad \Leftrightarrow \quad x_0, \dots, x_k \text{ sont distincts.}$$

Partie II. Suites récurrentes linéaires.

2. Montrons que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$:

   - La suite nulle $u = (0)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_d u_{n+d} + \cdots + a_0 u_n = a_d \times 0 + \cdots + a_0 \times 0 = 0$.
   - Soient $u, v \in E$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} a_d(\lambda u + \mu v)_{n+d} + \cdots + a_0(\lambda u + \mu v)_n &= a_d(\lambda u_{n+d} + \mu v_{n+d}) + \cdots + a_0(\lambda u_n + \mu v_n) \\ &= \lambda \underbrace{(a_d u_{n+d} + \cdots + a_0 u_n)}_{=0 \text{ car } u\in E} + \mu \underbrace{(a_d v_{n+d} + \cdots + a_0 v_n)}_{=0 \text{ car } v\in E} = 0. \end{aligned}$$

   Donc $(\lambda u + \mu v)$ appartient à E, qui est stable par combinaisons linéaires.

   Ainsi, $\boxed{E \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.}$

3. (a) L'implication $\Rightarrow$ est immédiate. Supposons réciproquement que deux suites u et v de E satisfassent :

   $$\forall n \in [\![0, d-1]\!],\ u_n = v_n.$$

   Montrons par récurrence multiple la propriété $\mathscr{P}(n)$: ¡¡ $u_n = v_n$ ¿¿ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   $\boxed{\mathbf{I}}$ Par hypothèse, $\mathscr{P}(0), \ldots, \mathscr{P}(d-1)$ sont vraies.

   $\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathscr{P}(k)$ vraie pour $k = n, n+1, \ldots, n+d-1$. Alors :

   $$\begin{aligned} a_d u_{n+d} &= -\left(a_{d-1} u_{n+d-1} + \cdots + a_0 u_n\right) \text{ car } u \in E \\ &= -\left(a_{d-1} v_{n+d-1} + \cdots + a_0 v_n\right) \text{ par hyp. de réc.} \\ &= a_d v_{n+d} \text{ car } v \in E. \end{aligned}$$

   Puisque $a_d \neq 0$, $u_{n+d} = v_{n+d}$ et la propriété $\mathscr{P}(n+d)$ est vraie.

   Par principe de récurrence, $u_n = v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $\boxed{\text{les suites } u \text{ et } v \text{ sont égales.}}$

   (b) Soit v une suite appartenant à E. considérons w la suite définie par :

   $$w = v_0 u^{(0)} + \cdots + v_{d-1} u^{(d-1)}.$$

   E étant un sous-espace vectoriel, la suite w appartient à E en tant que combinaison linéaire d'éléments de E. De plus, par définition de la famille $(u^{(0)}, \ldots, u^{(d-1)})$:

   $$\forall k \in [\![0, d-1]\!], \quad w_k = v_k.$$

   Par la question précédente, les suites v et w sont égales. Ceci prouve que la famille $(u^{(0)}, \ldots, u^{(d-1)})$ est génératrice de E.

   Montrons sa liberté. Soit pour cela $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{d-1}) \in \mathbb{C}$ tel que :

   $$\alpha_0 u^{(0)} + \cdots + \alpha_{d-1} u^{(d-1)}) = 0_{\mathbb{C}^{\mathbb{N}}}.$$

   En regardant le terme d'indice $k \in [\![0, d-1]\!]$ dans cette égalité, on obtient immédiatement $\alpha_k = 0$. D'où la liberté de cette famille.

   Ainsi, $\boxed{(u^{(0)}, \ldots, u^{(d-1)}) \text{ est une base de } E.}$ En particulier, $\boxed{E \text{ est de dimension finie}}$ et $\boxed{\dim(E) = d.}$

4. (a) Soit $r \in \mathbb{C}$. La suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

   $$a_d r^{n+d} + \cdots + a_1 r^{n+1} + a_0 r^n = 0.$$

   Ce qui équivaut à :

   $$a_d r^d + \cdots + a_1 r + a_0 = 0.$$

   Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ appartient à } E \text{ si, et seulement si, } r \text{ est racine de } P.}$

(b) Supposons P à racines simples $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{C}$. Par la question précédente, $\mathscr{B} = \left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r_d^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une famille d'éléments de E.

Montrons que $\mathscr{B}$ est libre. Soient pour cela $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\alpha_1 (r_1^n)_{n\in\mathbb{N}} + \cdots + \alpha_d (r_d^n)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

En particulier, pour tout $k = 0, \dots, d-1$:

$$\alpha_1 r_1^k + \cdots + \alpha_d r_d^k = 0,$$

ce qui se récrit matriciellement :

$$V(r_1, \dots, r_d)^\top \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_d \end{pmatrix} = 0_{d,1}$$

où $V(r_1, \dots, r_d)$ désigne la matrice de Vandermonde associée aux scalaires $r_1, \dots, r_d$. Ceux-ci étant deux à deux distincts, cette matrice est inversible. Sa transposée l'est donc également, de sorte que $\alpha_1 = \cdots = \alpha_d = 0$. La famille $\mathscr{B}$ est donc libre.

Puisque $\mathrm{Card}(\mathscr{B}) = d = \dim(E)$ et que $\mathscr{B}$ est libre, $\boxed{\mathscr{B} \text{ est bien une base de } E.}$

(c) Notons E l'ensemble des suites complexes u vérifiant la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} = 7u_{n+1} + 6u_n.$$

Par ce qui précède, E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^\mathbb{N}$ de dimension 3. Notons $P = X^3 - 7X - 6$ le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence. -1 et -2 sont racines évidentes de P. La dernière racine α de P peut s'obtenir à l'aide des relations coefficients-racines :

$$(-1) \times (-2) \times \alpha = (-1)^3 \frac{-6}{1}.$$

Ainsi, $\alpha = 3$ est la dernière racine de P.

Par les résultats obtenus précédemment, $\left(((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}, ((-2)^n)_{n\in\mathbb{N}}, (3^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E. Pour la suite u recherchée, il existe donc des scalaires $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ tels que :

$$u = \lambda\left((-1)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \mu\left((-2)^n\right)_{n\in\mathbb{N}} + \nu\left(3^n\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

ce qui se récrit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda(-1)^n + \mu(-2)^n + \nu 3^n.$$

D'après les conditions initiales $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$, les constantes λ, μ, ν sont solutions du système :

$$(\mathscr{S}) : \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ -\lambda - 2\mu + 3\nu = 0 \\ \lambda + 4\mu + 9\nu = 0 \end{cases}.$$

Résolvons celui-ci :

$$(\mathscr{S}) \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ -\mu + 4\nu = 1 \\ 3\mu + 8\nu = -1 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 1 \\ -\mu + 4\nu = 1 \\ 20\nu = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 3/2 \\ \mu = -3/5 \\ \nu = 1/10 \end{cases}$$

L'expression explicite de la suite $u \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$ recherchée est donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{3}{2}(-1)^n - \frac{3}{5}(-2)^n + \frac{1}{10}3^n.}$$

5. (a) Remarquons que $(N_0, N_1, N_2, \dots, N_{m-1})$ est une famille de polynômes de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$ échelonnée en degré. Par conséquent, elle est libre. Puisqu'elle est de cardinal $m = \dim(\mathbb{C}_{m-1}[X])$, $\boxed{\text{c'est une base de cet espace.}}$

(b) Puisque r est racine de multiplicité m de P :

$$P(r) = P'(r) = \cdots = P^{(m-1)}(r) = 0.$$

D'où pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$:

$$a_d \underbrace{d(d-1)\dots(d-k+1)}_{N_k(d)} r^{d-k} + \cdots + a_k \underbrace{k(k-1)\dots 1}_{N_k(k)} = 0$$

qui se récrit :

$$a_d N_k(d) r^d + \cdots + a_k N_k(k) r^k = 0$$

ou encore, puisque $N_k(i) = 0$ pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$:

$$\boxed{a_d N_k(d) r^d + \cdots + a_1 N_k(1) r + a_0 N_k(0) = 0.} \tag{E_k}$$

Soit maintenant $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$. Notons $(\beta_0, \dots, \beta_{m-1})$ ses coordonnées dans la base $(N_0, \dots, N_{m-1})$:

$$Q = \beta_0 N_0 + \cdots + \beta_{m-1} N_{m-1}.$$

En effectuant $\beta_0(E_0) + \cdots + \beta_{m-1}(E_{m-1})$, on obtient :

$$a_d \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k N_k(d) \right) r^d + \cdots + a_1 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k N_k(1) \right) r + a_0 \left(\sum_{k=0}^{m-1} \beta_k N_k(0) \right) = 0,$$

soit encore :

$$\boxed{a_d Q(d) r^d + \cdots + a_1 Q(1) r + a_0 Q(0) = 0.}$$

(c) Soit $k \in [\![0, m-1]\!]$. La suite $(n^k r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ appartient à E si, et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_d (n+d)^k r^{n+d} + \cdots + a_1 (n+1)^k r^{n+1} + a_0 n^k r^n = 0,$$

soit en simplifiant par $r^n \neq 0$:

$$a_d (n+d)^k r^d + \cdots + a_1 (n+1)^k r + a_0 n^k = 0.$$

Si on note $Q_n = (X+n)^k \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$, cette égalité se récrit :

$$a_d Q_n(d) r^d + \cdots + a_1 Q(1) r + a_0 Q(0) = 0.$$

Cette dernière égalité étant bien satisfaite par la question précédente, $\boxed{\text{la suite } \left(n^k r^n\right)_{n \in \mathbb{N}} \text{ appartient à } E \text{ pour tout } k \in [\![0, m-1]\!].}$

(d) Pour montrer qu'une famille est libre, il suffit de montrer que toutes ses sous-familles finies sont libres. Exploitons ce résultat de cours ici en considérant $N \in \mathbb{N}$ et $(\alpha_k) \in \mathbb{C}^{N+1}$ telle que :

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k \left(n^k r^n\right)_{n \in \mathbb{N}} = (0)_{n \in \mathbb{N}}$$

En particulier, pour tout $n \in [\![0, N]\!]$:

$$\sum_{k=0}^{N} \alpha_k n^k r^n = 0, \text{ soit encore } \sum_{k=0}^{N} \alpha_k n^k = 0$$

puisque $r^n \neq 0$. Ces égalités se récrivent matriciellement sous la forme :

$$V(0,1,\dots,N)\begin{pmatrix}\alpha_0\\ \vdots\\ \alpha_N\end{pmatrix} = 0_{N+1,0}.$$

La matrice de Vandermonde $V(0,1,\dots,N)$ étant inversible, on obtient $\alpha_0 = \cdots = \alpha_N = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{les suites } \left(n^k r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}, \text{ où } k \text{ décrit } \mathbb{N}, \text{ sont linéairement indépendantes.}}$

6. (a) Pour $p = 1$, prenons $Q_1 \in \mathbb{C}[X]$, et supposons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$Q_1(n)r_1^n = 0.$$

Puisque $r_1 \neq 0$, n est racine de Q_1. Ceci étant vrai pour tout entier naturel, Q_1 admet une infinité de racines : c'est le polynôme nul.

(b) i. Soit $n \in \mathbb{N}$. Les égalités (E_n) et (E_{n+1}) sont respectivement :

$$Q_1(n)r_1^n + \cdots + Q_{p+1}(n)r_{p+1}^n = 0$$

et :

$$Q_1(n+1)r_1^{n+1} + \cdots + Q_{p+1}(n+1)r_{p+1}^{n+1} = 0.$$

En effectuant $Q_{p+1}(n)(E_{n+1}) - Q_{p+1}(n+1)r_{p+1}(E_n)$ comme indiqué, on obtient :

$$\sum_{i=1}^{p} \left[Q_{p+1}(n)Q_i(n+1)r_i - Q_{p+1}(n+1)Q_i(n)r_{p+1}\right] r_i^n = 0.$$

En posant $S_i = Q_{p+1}(X)Q_i(X+1)r_i - Q_{p+1}(X+1)Q_i(X)r_{p+1} \in \mathbb{C}[X]$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, l'égalité précédente se récrit plus simplement :

$$\sum_{i=1}^{p} S_i(n)r_i^n = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$, on obtient que $S_i = 0_{\mathbb{C}[X]}$ pour tout $i \in [\![1,p]\!]$ par hypothèse de récurrence. Ainsi :

$$\boxed{\forall i \in [\![1,p]\!], \quad Q_i(X)Q_{p+1}(X+1)r_{p+1} = Q_i(X+1)Q_{p+1}(X)r_i.}$$

ii. Si l'un des polynômes $Q_1,\dots,Q_{p+1}$ est nul, on est ramené à la propriété au rang p qui permet de conclure par hypothèse de récurrence.

Supposons tous les polynômes $Q_1,\dots,Q_{p+1}$ non nuls. D'après la question précédente :

$$Q_1(X)Q_{p+1}(X+1)r_{p+1} = Q_1(X+1)Q_{p+1}(X)r_1.$$

Notons D le pgcd de Q_1 et Q_{p+1}. Quitte à diviser l'égalité ci-dessus par $D(X)D(X+1)$, on peut se ramener au cas où Q_1 et Q_{p+1} sont premiers entre eux.

Si Q_1 et Q_{p+1} sont constants, on obtiendrait après simplification $r_{p+1} = r_1$, ce qui est faux. L'un de ces polynômes est donc non constant, par exemple Q_{p+1}. Notons alors a une racine complexe de Q_{p+1} (qui existe bien par le théorème de d'Alembert-Gauss). Alors :

$$Q_1(a)Q_{p+1}(a+1)r_{p+1} = Q_1(a+1)Q_{p+1}(a)r_1 = 0.$$

Mais puisque Q_1 et Q_{p+1} sont premiers entre eux, $Q_1(a)$ est non nul (sinon $(X-a)$ diviserait Q_1 et Q_{p+1}). Ainsi, $a+1$ est racine de Q_{p+1}. En itérant ce procédé, on obtient que $a+2$ est aussi racine de Q_{p+1}, et plus généralement $a+k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Le polynôme Q_{p+1} est donc nul puisqu'il admet une infinité de racines, ce qui est supposé faux.

Ainsi, tous les polynômes $Q_1,\dots,Q_{p+1}$ sont nuls, ce qui prouve la propriété au rang $p+1$. On conclut par principe de récurrence.

7. D'après la question 5.(c), $\left(\left(n^j r_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{i\in[\![1,p]\!] j\in[\![0,m_i-1]\!]}$ est une famille de $\sum_{i=1}^{p} m_i = d$ éléments de E.

   Montrons que cette famille est libre. Soit pour cela $\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,m_1-1}, \dots, \alpha_{p,0}, \dots, \alpha_{p,m_p-1}$ des scalaires tels que :
$$\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_p-1} \alpha_{i,j} \left(n^j r_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}} = (0)_{n\in\mathbb{N}}.$$

   Pour tout $i \in [\![1,p]\!]$, notons $Q_i = \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} X^j$. L'égalité précédente ce récrit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{i=1}^{p} Q_i(n) r_i^n = 0.$$

   Par la question 6, $Q_1 = Q_2 = \cdots = Q_p = 0_{\mathbb{C}[X]}$, et donc :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ \forall j \in [\![0, m_i-1]\!], \quad \alpha_{i,j} = 0.$$

   La famille $\left(\left(n^j r_i^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \right)_{i\in[\![1,p]\!] j\in[\![0,m_i-1]\!]}$ est donc libre, de cardinal $d = \dim(E)$: c'est une base de E. Par conséquent, pour tout $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$, il existe un unique d-uplet $(\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,m_1-1}, \dots, \alpha_{p,0}, \dots, \alpha_{p,m_p-1}) \in \mathbb{C}^d$ tel que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j r_i^n.}$$

8. Supposons $d = 2$, et récrivons $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a, c \neq 0$. Grâce à la question précédente, nous sommes en mesure de décrire l'ensemble E des suites complexes u satisfaisant la relation de récurrence linéaire à coefficients constants :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a u_{n+2} + b u_{n+1} + c u_n = 0.$$

   Deux cas sont à distinguer :

   - Si P admet deux racines distinctes r_1 et r_2, alors :
   $$E = \text{Vect}\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (r_2^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
   et pour toute suite u appartenant à E, il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (uniques) telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n.$$
   - Si P admet une racine r de multiplicité 2, alors :
   $$E = \text{Vect}\left((r^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n r^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$$
   et pour toute suite u appartenant à E, il existe des constantes $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ (uniques) telles que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \lambda r^n + \mu n r^n = (\lambda + \mu n) r^n.$$

   On retrouve ici le résultat énoncé en cours sur les suites récurrentes linéaires d'ordre 2 dont nous n'avions pas donné de preuve. C'est à présent chose faite avec ce DM.

9. Le polynôme caractéristique associé à cette relation de récurrence est :

$$P = X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 7X + 2.$$

On remarque que 1 est racine évidente de P, d'où en factorisant (par l'algorithme de Hörner par exemple) :

$$P = (X-1)(X^3 - 4X^2 + 5X - 2).$$

1 est de nouveau racine de $X^3 - 4X^2 + 5X - 2$, d'où par factorisation :

$$P = (X-1)^2(X^2 - 3X + 2) = (X-1)^3(X-2).$$

Par la question 6, $\big((1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n \times 1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (n^2 \times 1^n)_{n\in\mathbb{N}}, (2^n)_{n\in\mathbb{N}}\big)$ est une base de E. Et une suite u appartient à E si, et seulement si, il existe des constantes $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \alpha + \beta n + \gamma n^2 + \delta 2^n.$$