DM 12

A rendre le 05/05/26

Exercice 1 (Démonstration de la formule de Stirling)

La formule de Stirling, du nom du mathématicien écossais James Stirling (1692 - 1770)? donne l'équivalent suivant de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$:

$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Le but de cet exercice est de démontrer cette formule. On pose pour cela $u_n = \dfrac{n^{n+\frac{1}{2}}}{n!e^n}$ et $v_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

1. À l'aide d'un développement limité à l'ordre 3, déterminer un équivalent simple en 0 de la fonction définie par :
$$f(x) = \left(1 + \frac{x}{2}\right)\ln(1+x) - x.$$
2. Simplifier l'expression de $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.
3. Déterminer un équivalent simple de v_n. Que peut-on en déduire ?
4. Démontrer qu'il existe un réel strictement positif λ tel que :
$$n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \lambda n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}.$$
5. On rappelle l'équivalent suivant, établi dans un DM précédent à l'aide des intégrales de Wallis :
$$\frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}\frac{\pi}{2} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}.$$
En déduire la valeur de λ.

Exercice 2 (Matrices de Vandermonde et suites récurrentes linéaires)

Partie I. Matrices de Vandermonde.

Soit $k \in \mathbb{N}$. À tous $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{C}$, on associe la matrice $\begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^k \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^k \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_k & \cdots & x_k^k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k+1}(\mathbb{C})$, appelée *matrice de Vandermonde* et notée $V(x_0, \dots, x_k)$ dans la suite.

Le but de cette partie est de montrer que la matrice $V(x_0, \dots, x_k)$ est inversible si, et seulement si, $x_0, \dots, x_k$ sont distincts.

1. (a) Soient $x_0, \dots, x_k \in \mathbb{C}$ des complexes distincts. Soit $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{k+1,1}(\mathbb{C})$ tel que :
$$V(x_0, \dots, x_k)X = 0_{k+1,1}.$$
En considérant le polynôme $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_k X^k$, montrer que $X = 0_{k+1,1}$. Conclure.
   (b) Montrer réciproquement que si la matrice $V(x_0, \dots, x_k)$ est inversible, alors les complexes $x_0, \dots, x_k$ sont distincts.

Partie II. Suites récurrentes linéaires.

On fixe pour toute cette partie $d \in \mathbb{N}^*$, $a_0, a_d \in \mathbb{C}^*$ et $a_1, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{C}$, et on pose :

$$P = a_d X^d + \cdots + a_1 X + a_0 \quad \text{et} \quad E = \left\{ u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ a_d u_{n+d} + \cdots + a_1 u_{n+1} + a_0 u_n = 0 \right\}.$$

2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

3. (a) Soient $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux éléments de E. Montrer que :
$$u = v \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in [\![0, d-1]\!],\ u_n = v_n.$$
   (b) Pour tout $i \in [\![0, d-1]\!]$, on note $u^{(i)}$ l'unique suite de E pour laquelle $u_j^{(i)} = \delta_{i,j}$ pour tout $j \in [\![0, d-1]\!]$. Par exemple, $u_0^{(0)} = 1$ et $u_1^{(0)} = \cdots = u_{d-1}^{(0)} = 0$.

   Montrer que la famille $(u^{(0)}, \dots, u^{(d-1)})$ est une base de E. En déduire que E est de dimension finie et préciser $\dim(E)$.

4. (a) Soit $r \in \mathbb{C}$. À quelle condition nécessaire et suffisante la suite $(r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient-elle à E ?
   (b) En déduire que si P est à racines simples $r_1, \dots, r_d \in \mathbb{C}$, la famille $\left((r_1^n)_{n\in\mathbb{N}}, \dots, (r_d^n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$ est une base de E.
   (c) Déterminer une expression explicite de la suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$, $u_1 = u_2 = 0$ et $u_{n+3} = 7u_{n+1} + 6u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5. Soit $r \in \mathbb{C}^*$. On note m la multiplicité de r dans P.
   (a) On pose $N_0 = 1$ et pour tout $k \in [\![1, m-1]\!]$, $N_k = X(X-1)\dots(X-k+1)$.

   Montrer que la famille $(N_0, N_1, \dots, N_{m-1})$ est une base de $\mathbb{C}_{m-1}[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$:
$$a_d N_k(d) r^d + \cdots + a_1 N_k(1) r + a_0 N_k(0) = 0.$$
   En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{C}_{m-1}[X]$:
$$a_d Q(d) r^d + \cdots + a_1 Q(1) r + a_0 Q(0) = 0.$$
   (c) En déduire que la suite $\left(n^k r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ appartient à E pour tout $k \in [\![0, m-1]\!]$.
   (d) Montrer que les suites $\left(n^k r^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où k décrit $\mathbb{N}$, sont linéairement indépendantes.

6. On souhaite montrer par récurrence sur p que pour tous $r_1, \dots, r_p \in \mathbb{C}^*$ distincts, pour tous $Q_1, \dots, Q_p \in \mathbb{C}[X]$:
$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ Q_1(n) r_1^n + \cdots + Q_p(n) r_p^n = 0\right) \ \Rightarrow \ \left(Q_1 = \cdots = Q_p = 0_{\mathbb{C}[X]}\right).$$
   (a) **Initialisation.** Montrer que le résultat est vrai pour $p = 1$.
   (b) **Hérédité.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On suppose le résultat vrai au rang p. Soient $r_1, \dots, r_{p+1}$ des complexes distincts et $Q_1, \dots, Q_{p+1} \in \mathbb{C}[X]$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$$Q_1(n) r_1^n + \cdots + Q_{p+1}(n) r_{p+1}^n = 0. \qquad (E_n)$$
      i. Montrer que pour tous $i \in [\![1, p]\!]$:
$$Q_i(X) Q_{p+1}(X+1) r_{p+1} = Q_i(X+1) Q_{p+1}(X) r_i.$$
      On pourra pour cela considérer l'égalité $Q_{p+1}(n)(E_{n+1}) - Q_{p+1}(n+1) r_{p+1}(E_n)$.
      ii. Conclure.

7. On note $r_1, \dots, r_p$ les racines distinctes de P et $m_1, \dots, m_p$ leurs multiplicités respectives.

   Montrer que pour toute suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à E, il existe un unique d-uplet $(\alpha_{1,0}, \dots, \alpha_{1,m_1-1}, \dots, \alpha_{p,0}, \dots, \alpha_{p,m_p-1})$ de $\mathbb{C}^d$ tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=0}^{m_i-1} \alpha_{i,j} n^j r_i^n.$$

8. Quel résultat de cours a-t-on en particulier démontré lorsque $d = 2$?
9. Décrire l'ensemble E des suites $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ satisfaisant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+4} = 5u_{n+3} - 9u_{n+2} + 7u_{n+1} - 2u_n.$$
