Correction - DM 13

A rendre le 12/05/26

Exercice 1 (Suite des noyaux et images itérés)
I. Étude d'un exemple

1. Tout d'abord, rappelons qu'une telle application linéaire u existe et est unique (cours - définition d'une application linéaire par l'image d'une base). Déterminons N_k et I_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

   - $k = 0$. Alors $u^0 = \mathrm{id}_E$, et $N_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{id}_E) = \{0_E\}$, $I_0 = \dim(\mathrm{id}_E) = E$.
   - $k = 1$. Déterminons $N_1 = \mathrm{Ker}(u)$ pour commencer. Pour tout $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$:

   $$u(x) = 0_E \Leftrightarrow b(e_1 + 2e_2 + 3e_3) + ce_1 = 0_E \Leftrightarrow (b+c)e_1 + 2be_2 + 3be_3 = 0_E$$
   $$\underset{(e_1,e_2,e_3)\text{ libre}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} (b+c) = 0 \\ 2b = 0 \\ 3b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow b = c = 0$$

   Ainsi, $\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \{ae_1, a \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1)}$. La famille (e_1) est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(u)$, et libre car formée d'un seul vecteur non nul. C'est donc une base de $\mathrm{Ker}(u)$, qui est de dimension 1.

   Déterminons $\mathrm{Im}(u)$. Par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u)) = 3 - \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 2$. De plus :

   $$\boxed{\mathrm{Im}(u) = \mathrm{Vect}(u(e_1), u(e_2), u(e_3)) = \mathrm{Vect}((e_1 + 2e_2 + 3e_3), e_1).}$$

   La famille $((e_1 + 2e_2 + 3e_3), e_1)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u)$, de cardinal $2 = \dim(\mathrm{Im}(u))$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(u)$.

   - $k = 2$. Calculons :

   $$u^2(e_1) = 0_E, \quad u^2(e_2) = u(e_1+2e_2+3e_3) = 2(e_1+2e_2+3e_3)+3e_1 = 5e_1+4e_2+6e_3, \quad u^2(e_3) = 0_E.$$

   Déterminons $N_2 = \mathrm{Ker}(u^2)$. Soit $x = ae_1 + be_2 + ce_3 \in \mathbb{R}^3$, alors :

   $$u^2(x) = 0_E \Leftrightarrow b(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) = 0_E \Leftrightarrow b = 0$$

   car $5e_1 + 4e_2 + 6e_3 \neq 0_E$ (la famille (e_1, e_2, e_3) étant libre). Ainsi :

   $$\boxed{\mathrm{Ker}(u^2) = \{ae_1 + ce_3, a, c \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(e_1, e_3)}.$$

   La famille (e_1, e_3) est donc génératrice de $\mathrm{Ker}(u^2)$, et libre car sous-famille d'une famille libre. Donc (e_1, e_3) est une base de $\mathrm{Ker}(u^2)$, et $\dim(\mathrm{Ker}(u^2)) = 2$.

   Déterminons $I_2 = \mathrm{Im}(u^2)$. Par théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(u^2)) = 3 - 2 = 1$, et :

   $$\boxed{\mathrm{Im}(u^2) = \mathrm{Vect}(u^2(e_1), u^2(e_2), u^2(e_3)) = \mathrm{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3).}$$

   Ainsi, $(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$ est génératrice de $\mathrm{Im}(u^2)$, de cardinal égal à $1 = \dim(\mathrm{Im}(u^2))$, c'est donc une base de I_2.

   - $k \geq 3$. Calculons :

   $$u^3(e_1) = 0_E, \quad u^3(e_2) = u(5e_1+4e_2+6e_3) = 4(e_1+2e_2+3e_3)+6e_1 = 2(5e_1+4e_2+6e_3), \quad u^2(e_3) = 0_E.$$

   On montre alors de même que précédemment que $\boxed{N_3 = \mathrm{Vect}(e_1, e_3) \text{ et } I_3 = \mathrm{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)}$, et que $\boxed{(e_1, e_3) \text{ et } (5e_1 + 4e_2 + 6e_3) \text{ en sont des bases respectives.}}$

Plus généralement, on montre par récurrence que pour tout $k \geq 3$:

$$u^k(e_1) = 0_E, \quad u^k(e_2) = 2^{k-2}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3), \quad u^k(e_3) = 0_E,$$

et que $\boxed{N_k = \text{Vect}(e_1, e_3) \text{ et } I_k = \text{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3).}$

2. Par les calculs précédents, $\text{Im}(N_2) + \text{Im}(I_2) = 3$. Soit à présent $x \in I_2 \cap N_2$. Alors il existe $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^2$ tels que :

$$x = \lambda e_1 + \mu e_3 = \nu(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$$

Alors :

$$(\lambda - 5\nu)e_1 + (-4\nu)e_2 + (\mu - 6\nu)e_3 = 0_E$$

Par liberté de (e_1, e_2, e_3), $\begin{cases} \lambda - 5\nu = 0 \\ -4\nu = 0 \\ \mu - 6\nu = 0 \end{cases}$, et donc $\lambda = \mu = \nu = 0$. Ainsi $x = 0_E$ et $N_2 \cap I_2 = \{0_E\}$ (l'inclusion $N_2 \cap I_2 \supset \{0_E\}$ étant immédiate car $I_2 \cap N_2$ est un sous-espace vectoriel). Finalement :

$$\boxed{E = N_2 \oplus I_2.}$$

3. Commençons par démontrer le résultat suivant que nous utiliserons ensuite.

> **Propriété.**
> Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que $(e_i)_{i \in I}$ est une famille génératrice de F.
>
> Alors F est stable par f si, et seulement si, $f(e_i) \in F$ pour tout $i \in I$.

L'implication directe est immédiate : si F est stable par f, pour tout $x \in F$, $f(x)$ appartient à F. Par conséquent, pour tout $i \in I$, $e_i \in F$ et donc $f(e_i) \in F$.

Réciproquement, supposons que pour tout $i \in I$, $f(e_i)$ appartient à F. Montrons que F est stable par f. Soit pour cela $x \in F$. Puisque $(e_i)_{i \in I}$ est génératrice de F, il existe une famille de scalaires $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$ telle que :

$$x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i.$$

Par linéarité de f :

$$f(x) = \sum_{i \in I} \lambda_i \underbrace{f(e_i)}_{\in F} \in F \text{ car } F \text{ s.e.v. de E.}$$

Appliquons ce résultat ici. Puisque $N_2 = \text{Vect}(e_1, e_3)$ et que $u(e_1) = 0_E \in N_2$, $u(e_3) = e_1 \in N_2$, $\boxed{N_2 \text{ est bien stable par } u.}$ De plus, l'endomorphisme induit $\tilde{u}$ par u sur N_2 satisfait $\tilde{u}^2(e_1) = 0_E = \tilde{u}^2(e_3)$. Donc $\tilde{u}^2 = 0_{\mathscr{N}}$ car $\tilde{u}$ s'annule sur une base de N_2. Et comme $\tilde{u} \neq 0_{\mathscr{L}(N_2)}$ car $\tilde{u}(e_3) = e_1 \neq 0_E$, $\boxed{\tilde{u} \text{ est nilpotente d'indice de nilpotence 2.}}$

Puisque $I_2 = \text{Vect}(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$ et que $u(5e_1 + 4e_2 + 6e_3) = 2(5e_1 + 4e_2 + 6e_3)$. l'endomorphisme induit par u sur I_2 est bien une $\boxed{\text{homothétie de rapport 2.}}$

II. Monotonie

4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Prenons $x \in N_k$. Alors $u^k(x) = 0_E$, et en composant par u :

$$u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0_E) = 0_E.$$

Ainsi $x \in N_{k+1}$. D'où $\boxed{N_k \subset N_{k+1}.}$

Soit $y \in I_{k+1}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^{k+1}(x)$. Mais alors $y = u^k(u(x)) \in \mathrm{Im}(u^k)$. Ainsi, $\boxed{I_{k+1} \subset I_k.}$

5. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $N_p = N_{p+k}$.

$\boxed{\textbf{I}}$ La propriété est vraie pour $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $k \geq 1$. Supposons la propriété au rang k vraie, c'est-à-dire $N_p = N_{p+k}$. Puisque

$$N_p \subset N_{p+1} \subset \cdots \subset N_{p+k},$$

on en déduit que $N_p = N_{p+1} = \cdots = N_{p+k}$.

Par la question précédente, on a déjà l'inclusion $N_{p+k} \subset N_{p+k+1}$. Soit à présent $x \in N_{p+k+1}$. Alors :

$$u^{p+k+1}(x) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(u(x)) = 0_E.$$

Ainsi $u(x) \in \mathrm{Ker}(u^{p+k}) = \mathrm{Ker}(u^{p+k-1})$ et donc :

$$u^{p+k-1}(u(x)) = 0_E \Rightarrow u^{p+k}(x) = 0_E.$$

Finalement, $x \in \mathrm{Ker}(u^{p+k})$ et donc $N_{p+k} \supset N_{p+k+1}$. D'où la propriété au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ N_{p+k} = N_p.}$

6. Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k, $I_q = I_{q+k}$.

$\boxed{\textbf{I}}$ La propriété est vraie au rang $k = 0$ et $k = 1$ (par hypothèse).

$\boxed{\textbf{H}}$ Soit $k \geq 1$. Supposons la propriété au rang k vraie, c'est-à-dire $I_q = I_{q+k}$. Puisque :

$$I_{q+k} \subset I_{q+k-1} \subset \cdots \subset I_q,$$

alors $I_{q+k} = I_{q+k-1} = \cdots = I_q$.

Montrons que $I_{q+k+1} = I_{q+k}$. On a déjà l'inclusion $I_{q+k+1} \subset I_{q+k}$ par une question précédente. Montrons l'inclusion réciproque : soit $z \in I_{q+k}$, il existe $x \in E$ tel que $z = u^{q+k}(x) = u(u^{q+k-1}(x))$. Or $u^{q+k-1}(x)$ appartient à I_{q+k-1}, qui est égal à I_{q+k} par hypothèse. Donc il existe $y \in E$ tel que $u^{q+k-1}(x) = u^{q+k}(y)$. Ainsi :

$$z = u(u^{q+k-1}(x)) = u(u^{q+k}(y)) = u^{q+k+1}(y) \in I_{q+k+1}.$$

D'où finalement l'inclusion $I_{q+k+1} \supset I_{q+k}$, et donc la propriété au rang $k+1$.

On conclut par principe de récurrence que $\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N},\ I_{p+k} = I_p.}$

III. En dimension finie

7. La suite des dimensions (n_k) est une suite d'entiers naturels croissante (par croissance de (N_k) pour l'inclusion), et majorée par $n = \dim(E)$. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $s \in \mathbb{N}$ tel que $n_s = n_{s+1}$. Puisque de plus $N_s \subset N_{s+1}$, on a l'égalité $N_s = N_{s+1}$.

L'ensemble $A = \{k \in \mathbb{N} \mid N_k = N_{k+1}\}$ est une partie non vide de $\mathbb{N}$. Elle admet donc un plus petit élément p Alors :

- $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, p-1]\!],\ N_k \subsetneq N_{k+1}}$ par définition de p ;
- $\boxed{\text{pour tout } k \geq p,\ N_k = N_{k+1}}$ d'après la question 5.

8. On procède de même : la suite d'entiers naturels (i_k) est décroissante. Elle est donc constante à partir d'un certain rang, et il existe $t \in \mathbb{N}$ tel que $i_t = i_{t+1}$, et alors $I_t = I_{t+1}$.

   Considérons q le plus petit entier tel que $I_q = I_{q+1}$. Alors :

   - $\boxed{\text{pour tout } k \in [\![0, q-1]\!],\ I_k \subsetneq I_{k+1}}$ par définition de q ;
   - $\boxed{\text{pour tout } k \geq q,\ I_k = I_{k+1}}$ d'après la question 6.

9. Par le théorème du rang appliqué à u^k :

$$\dim(E) = \mathrm{rg}(u^k) + \dim(\mathrm{Ker}(u^k)), \quad \text{soit} \quad n = i_k + n_k.$$

   La suite $(n - i_k)$ est strictement croissante puis constante à partir du rang q, (n_k) est strictement croissante puis constante à partir du rang p. Comme elles sont égales, $\boxed{p = q.}$

   Enfin comme $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_p \leq n$:

$$n = n_p - n_0 = \underbrace{(n_p - n_{p-1})}_{\geq 1} + \underbrace{(n_{p-1} - n_{p-2})}_{\geq 1} + \cdots + \underbrace{(n_1 - n_0)}_{\geq 1} \boxed{\geq p.}$$

10. Par le théorème du rang (appliqué à u^p), $\dim(E) = \dim(N_p) + \dim(I_p)$.

    Montrons que $N_p \cap I_p = \{0_E\}$. Soit $y \in N_p \cap I_p$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u^p(x)$. Alors :

$$u^{2p}(x) = u^p(y) = 0_E.$$

    Donc x appartient à $\mathrm{Ker}(u^{2p}) = \mathrm{Ker}(u^p)$ par définition de p. Ainsi :

$$y = u^p(x) = 0_E.$$

    Donc $N_p \cap I_p = \{0_E\}$, et $\boxed{E = N_p \oplus I_p.}$

11. Rappelons la propriété suivante, démontrée en TD.

    > **Propriété.**
    > Soient $f, g \in \mathscr{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E.
    >
    > On suppose que f et g commutent, c'est-a-dire $f \circ g = g \circ f$. Alors $\mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont stables par g.

    Ici, puisque u^p et u commutent, $\boxed{N_p = \mathrm{Ker}(u^p) \text{ et } I_p = \mathrm{Im}(u^p) \text{ sont stables par } u.}$

    Considérons l'endomorphisme $\tilde{u}$ induit par u sur N_p. Alors pour tout $x \in N_p = \mathrm{Ker}(u^p)$, $\tilde{u}^p(x) = u^p(x) = 0_E$. Comme de plus $N_{p-1} \subsetneq N_p$, alors il existe $x \in N_p \setminus N_{p-1}$ qui satisfait $\tilde{u}^{p-1}(x) = u^{p-1}(x) \neq 0_E$. Ainsi $\boxed{\tilde{u} \text{ est un endomorphisme nilpotent, d'indice de nilpotence } p.}$

    Considérons l'endomorphisme $\bar{u}$ induit par u sur I_p. Montrons que $\bar{u}$ est un automorphisme de I_p. Comme on est en dimension finie, il suffit de montrer que $\bar{u}$ est injective. Soit donc $x \in I_p$ tel que $\bar{u}(x) = 0_E$. Alors $u(x) = 0_E$ et donc $x \in \mathrm{Ker}(u)$. Ainsi x appartient à $N_1 \cap I_p \subset N_p \cap I_p = \{0_E\}$. Donc $x = 0_E$, et $\boxed{\bar{u} \text{ est bien un automorphisme de } I_p.}$

12. (a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Par le théorème du rang appliqué à u^k, $n = i_k + n_k$. D'où :

$$\delta_k = i_k - i_{k+1} = (n - n_k) - (n - n_{k+1}) \boxed{= n_{k+1} - n_k.}$$

(b) Puisque $I_{k+1} \subset I_k$ et que I_k est de dimension finie, le cours assure l'existence d'un supplémentaire D_k de I_{k+1} dans I_k :

$$\boxed{I_k = I_{k+1} \oplus D_k.}$$

En prenant les dimensions, on obtient $\boxed{\dim(D_k) = i_k - i_{k+1} = \delta_k.}$

(c) Calculons :

$$\begin{aligned} I_{k+1} &= \mathrm{Im}(u^{k+1}) = \mathrm{Im}(u \circ u^k) = u(\mathrm{Im}(u^k)) = u(I_k) \\ &= u(I_{k+1} + D_k) = u(I_{k+1}) + u(D_k) \boxed{= I_{k+2} + u(D_k)} \end{aligned}$$

Justifions la troisième égalité, en montrant que si $u \in \mathscr{L}(E)$ et F, G sont des sous-espaces vectoriels de E, alors :

$$u(F+G) = u(F) + u(G).$$

Pour tout $z \in E$:

$$\begin{aligned} z \in u(F+G) &\Leftrightarrow \exists x \in (F+G), z = u(x) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G, z = u(x_1 + x_2) \\ &\Leftrightarrow \exists (x_1, x_2) \in F \times G, z = u(x_1) + u(x_2) \\ &\Leftrightarrow z \in u(F) + u(G) \end{aligned}$$

(d) Soit $k \in \mathbb{N}$. En prenant les dimensions :

$$\dim(I_{k+1}) = \dim(I_{k+2} + u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(u(D_k)) \leq \dim(I_{k+2}) + \dim(D_k).$$

Ainsi, $\delta_{k+1} = i_{k+1} - i_{k+2} \leq \dim(D_k) = \delta_k$. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $\boxed{(\delta_k) \text{ est décroissante.}}$

> ✍ **À retenir. Suite des noyaux et images itérés en dimension finie.**
>
> Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme non nul. Alors :
>
> - il existe un entier $p \in [\![1, n]\!]$ tel que :
>
> $$\mathrm{Ker}(u) \subsetneq \mathrm{Ker}(u^2) \subsetneq \cdots \subsetneq \mathrm{Ker}(u^p) = \mathrm{Ker}(u^{p+1}) = \cdots$$
>
> et
>
> $$\mathrm{Im}(u) \supsetneq \mathrm{Im}(u^2) \supsetneq \cdots \supsetneq \mathrm{Im}(u^p) = \mathrm{Im}(u^{p+1}) = \cdots$$
>
> En d'autres termes, la suite des noyaux itérées (resp. des images itérées) est d'abord strictement croissante (resp. décroissante) puis constante, et ces suites stationnent à partir du même rang.
>
> - Les suites des noyaux et images itérés ¡¡ s'essouffle ¿¿ : les sauts de dimensions décroissent.

(e) Soit u un endomorphisme nilpotent, et p son indice de nilpotence. On a alors :

$$\{0_E\} = N_0 \subset N_1 \subset \cdots \subset N_p = E.$$

De plus, on a montré que ces inclusions sont strictes : en effet s'il existe $0 \leq k \leq p-1$ tel que $N_k = N_{k+1}$, alors $N_k = N_p = E$ et $u^k = 0$, ce qui contredirait le fait que p soit l'indice de nilpotence de u. **L'indice de nilpotence de u est donc également l'entier p à partir duquel la suite des noyaux itérés est constante.**

Par la question 9, on a déjà $p \leq n$. On retrouve ici un résultat déjà obtenu en TD : en dimension finie, l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent est inférieure à la dimension.

D'autre part, la suite (δ_k) est décroissante, et $\delta_0 = \dim(\mathrm{Ker}(u)) = 1$. Donc $\delta_k \leq 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme de plus, pour tout $0 \leq k \leq p-1$, $\delta_k > 0$ (puisque $N_k \subsetneq N_{k+1}$) et que $\delta_k = 0$ si $k \geq p$ (puisque la suite des noyaux itérée est constante pour $k \geq p$), on obtient :

$$\delta_k = \begin{cases} 1 \text{ si } 0 \leq k \leq p-1 \\ 0 \text{ si } k \geq p. \end{cases}$$

Finalement :

$$\begin{aligned} n = n_p = n_p - n_0 &= (n_p - n_{p-1}) + (n_{p-1} - n_{p-2}) + \cdots + (n_1 - n_0) \\ &= \delta_{p-1} + \delta_{p-2} + \cdots + \delta_0 = p \end{aligned}$$

$\boxed{\text{L'indice de nilpotence de } u \text{ est donc } n.}$

IV. Cas de la dimension quelconque

13. Dans cette question, on prendra $E = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ l'espace vectoriel des suites réelles ou complexes. On notera une suite $u = (u_n)$ sous la forme $u = (u_0, u_1, u_2, \dots)$.

   (a) On considère l'application $R : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suivante, appelée *shift à droite* :

   $$R : u = (u_n) \mapsto R(u) = (0, u_0, u_1, u_2, \dots).$$

   Je vous laisse vérifier que R est une application linéaire injective. Alors R^k est aussi une application linéaire injective car composée d'applications linéaires injectives. Ainsi $N_k = \mathrm{Ker}(R^k) = \{0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}\}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite $\boxed{(N_k) \text{ est constante.}}$

   Regardons I_k pour $k \in \mathbb{N}$:

   $$\begin{aligned} I_k = \{R^k(u),\ u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\} &= \{(\underbrace{0, \dots, 0}_{k \text{ fois}}, u_0, u_1, \dots),\ u_i \in \mathbb{K}\} \\ &= \{u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \mid u_0 = u_1 = \cdots = u_{k-1} = 0\}. \end{aligned}$$

   Ainsi, $I_{k+1} \subsetneq I_k$, et la suite $\boxed{(I_k) \text{ est bien strictement décroissante pour l'inclusion.}}$

   (b) On regarde maintenant l'application $L : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ suivante, appelée *shift à gauche* :

   $$L : u = (u_n) \mapsto R(u) = (u_1, u_2, u_3, \dots).$$

   Je vous laisse vérifier que L est une application linéaire surjective. Donc, L^k est également linéaire surjective. Ainsi $I_k = \mathrm{Im}(L^k) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et la suite $\boxed{(I_k) \text{ est constante.}}$

   Regardons N_k pour $k \in \mathbb{N}$. Soit $u = (u_0, u_1, u_2, \dots) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$:

   $$\begin{aligned} u \in N_k &\Leftrightarrow L^k(u) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \\ &\Leftrightarrow (u_k, u_{k+1}, u_{k+2}, \dots) = 0_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}} \\ &\Leftrightarrow \forall s \geq k,\ u_s = 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, $N_k \subsetneq N_{k+1}$, et $\boxed{\text{la suite } (N_k) \text{ est bien strictement croissante pour l'inclusion}}$.

Remarque. Notons que $L \circ R = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$. On retrouve en particulier que R est injective et que L est surjective (d'après le cours sur les applications).

Mise en garde.

Attention, bien que $L \circ R = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$, ces applications ne sont pas bijectives. On notera d'ailleurs que $R \circ L \neq \mathrm{id}_{\mathbb{K}^{\mathbb{N}}}$ puisque :

$$R \circ L(u) = (0, u_1, u_2, u_3, \dots).$$

Rappelons que pour $f, g \in \mathscr{L}(E)$, l'implication ($f \circ g = \mathrm{id}_E \Rightarrow f, g$ bijectives) n'est vrai que si on est EN DIMENSION FINIE !

14. (a)
- Soit $k \in \mathbb{K}$. Supposons que ($N_k = N_{k+1}$ et $I_{k+1} = I_{k+2}$). Montrons que $I_k = I_{k+1}$. On a déjà que $I_k \supset I_{k+1}$, reste à montrer l'autre inclusion.

  Soit $y \in I_k$, alors il existe $x_1 \in E$ tel que $y = f^k(x_1)$. De plus, $f(y) \in I_{k+1} = I_{k+2}$. Donc il existe $x_2 \in I_{k+2}$ tel que $f(y) = f^{k+2}(x_2)$. Ainsi :

  $$f(y) = f^{k+1}(x_1) = f^{k+2}(x_2).$$

  En particulier, $f^{k+1}(x_1 - f(x_2)) = 0_E$ et donc $x_1 - f(x_2) \in N_{k+1} = N_k$. Ainsi, $f^k(x_1 - f(x_2)) = 0_E$, d'où

  $$y = f^k(x_1) = f^{k+1}(x_2).$$

  Ainsi $y \in I_{k+1}$, d'où l'inclusion $\boxed{I_k \subset I_{k+1}.}$

- Supposons que ($I_k = I_{k+1}$ et $N_{k+1} = N_{k+2}$). Montrons que $N_k = N_{k+1}$. On a déjà $N_k \subset N_{k+1}$.

  Soit $y \in N_{k+1}$, alors $f^k(y) \in I_k = I_{k+1}$. Il existe donc $x \in E$ tel que $f^k(y) = f^{k+1}(x)$. Mais alors :

  $$f^{k+2}(x) = f^{k+1}(y) = 0_E.$$

  Ainsi $x \in N_{k+2} = N_{k+1}$. On en déduit donc que $f^k(y) = f^{k+1}(x) = 0_E$ et donc que y appartient à N_k. D'où l'inclusion $\boxed{N_{k+1} \subset N_k.}$

(b) On suppose donc l'existence de tels entiers p et q. On veut montrer que $p = q$ (on a déjà ce résultat en dimension finie).

- si $p < q$, alors ($N_{q-1} = N_q$ et $I_q = I_{q+1}$). Par la question précédente, on aurait alors $I_{q-1} = I_q$, ce qui contredirait la définition (la minimalité) de l'entier q. Donc $p \geq q$.
- si $p > q$, de même ($I_{p-1} = I_p$ et $N_p = N_{p+1}$), d'où $N_{p-1} = N_p$ ce qui contredit la définition de p cette fois. Ainsi $p \leq q$.

Finalement, on obtient bien $\boxed{p = q.}$