

A rendre le 19/05/26

Exercice 1

On dispose de 2 pièces de monnaie équilibrées, c'est-à-dire que la probabilité d'avoir Pile en lançant l'une de ces pièces vaut $\frac{1}{2}$.

On effectue des lancers successifs selon le protocole suivant :

- à l'étape 1, on lance les 2 pièces,
- à l'étape 2, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 1 (s'il en existe),
- à l'étape 3, on lance les pièces ayant amené Pile à l'étape 2 (s'il en existe),

et ainsi de suite. On suppose que les lancers successifs éventuels d'une même pièce sont indépendants et que les deux pièces sont indépendantes l'une de l'autre.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, les événements :

- A_n : "obtenir 0 Pile à l'étape n ",
- B_n : "obtenir 1 Pile à l'étape n ",
- C_n : "obtenir 2 Piles à l'étape n ".

et on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$ et $c_n = P(C_n)$.

1. Calculer a_1 , b_1 et c_1 .
2. Soit n un entier naturel non nul.

Calculer les probabilités conditionnelles suivantes :

$$P_{A_n}(A_{n+1}), P_{A_n}(B_{n+1}), P_{A_n}(C_{n+1}), P_{B_n}(A_{n+1}), P_{B_n}(B_{n+1}), \\ P_{B_n}(C_{n+1}), P_{C_n}(A_{n+1}), P_{C_n}(B_{n+1}) \text{ et } P_{C_n}(C_{n+1}).$$

Un argumentaire est attendu pour expliquer les valeurs de chacune de ces probabilités.

3. À l'aide de la formule des probabilités totales, prouver que :

$$\forall n \geq 1, \quad \begin{cases} a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{4}c_n, \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n, \\ c_{n+1} = \frac{1}{4}c_n. \end{cases}$$

4. (a) Déterminer l'expression de c_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- (b) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} - \frac{1}{8}b_n.$$

- (c) En déduire l'expression de b_n puis de a_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.
- (d) Donner la limite de chacune des trois suites (a_n) , (b_n) et (c_n) . Était-ce prévisible ?

Exercice 2

Dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces vectoriels F et G suivants :

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z\},$$

$$G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\}.$$

1. (a) Donner une base de F .
 (b) Donner une base de G .
 (c) Montrer que $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.
2. Soit p le projecteur sur F parallèlement à G . Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.
 (a) Calculer (en fonction de x, y et z) les coordonnées des vecteurs $u_F \in F$ et $u_G \in G$ tels que

$$u = u_F + u_G.$$

- (b) En déduire une expression de $p(u)$ en fonction de x, y et z .
3. Soit q l'application de \mathbb{R}^3 défini par

$$q : \begin{cases} \mathbb{R}^3 & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \mapsto (x + y - z, y, y) \end{cases} .$$

- (a) Montrer que q est un endomorphisme de E .
- (b) Montrer que q est un projecteur de E .
- (c) Déterminer le noyau $\text{Ker}(q)$. On en déterminera une base.
- (d) Vérifier que $\text{Ker}(q)$ et G sont en somme directe.
- (e) Montrer que $\text{Im}(q) = F$.
- (f) En déduire que $p \circ q = q$ et que $q \circ p = p$.
4. On pose $r = p + q$.
 (a) Est-ce que r est un projecteur ? une symétrie ?
 (b) Pour $n \geq 2$, calculer r^n en fonction de r .