

## A rendre le 26/05/26

### Exercice 1

Une urne contient initialement une boule blanche et une boule rouge.

On effectue des tirages successifs d'une boule dans l'urne selon le protocole suivant : après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne puis on rajoute dans l'urne, avant le tirage suivant, une boule de la couleur de la boule que l'on vient de tirer.

Pour tout entier naturel  $n$ , on note  $X_n$  la variable aléatoire égale au nombre de boule blanche obtenues au cours des  $n$  tirages.

Enfin, pour tout entier  $k \geq 1$ , on pose  $B_k$  (resp.  $R_k$ ) l'événement : "obtenir une boule blanche (resp. rouge) à la  $k$ -ième pioche".

#### 1. Loi de $X_2$

- (a) Pour  $k \in \{0, 1, 2\}$ , exprimer l'événement  $(X_2 = k)$  à l'aide d'événements  $B_k$  et  $R_k$ .
- (b) Déterminer la loi, l'espérance et la variance de  $X_2$ .

#### 2. Loi de $X_3$

- (a) Calculer  $P(X_3 = 0)$  et  $P(X_3 = 3)$ .
- (b) Avec le système complet d'événements  $(X_2 = 0), (X_2 = 1), (X_2 = 2)$ , calculer  $P(X_3 = 1)$ .
- (c) En déduire la loi de  $X_3$ .

#### 3. Loi de $X_n$ lorsque $n \geq 2$

- (a) Expliciter  $X_n(\Omega)$  et calculer  $P(X_n = 0)$ .
- (b) Soit  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ . En introduisant le système complet d'événements  $(X_{n-1} = i)_{0 \leq i \leq n-1}$ , montrer que :

$$P(X_n = k) = P(X_{n-1} = k-1)P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k) + P(X_{n-1} = k)P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$$

- (c) Calculer soigneusement  $P_{(X_{n-1}=k-1)}(X_n = k)$  et  $P_{(X_{n-1}=k)}(X_n = k)$ .
- (d) Montrer par récurrence sur  $n \geq 2$  que :  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, P(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$ .
- (e) Donner l'espérance et la variance de  $X_n$ .

### Exercice 2

On considère  $E$  l'espace vectoriel des fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$  et  $F$  le sous-espace vectoriel engendré par  $\mathcal{B} = (\sin, \cos, \text{sh}, \text{ch})$ . On note  $\Delta$  l'application linéaire qui à toute fonction  $f$  associe sa dérivée  $f'$ .

1.
  - (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $F$ .
  - (b) Montrer que  $\Delta$  est un endomorphisme de  $F$ . Est-ce un automorphisme de  $F$  ?
2. Soit  $\text{id}$  l'application identité de  $F$ , et  $f = \Delta - \text{id}$ .
  - (a) Écrire la matrice de  $f$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
  - (b) Déterminer le noyau de  $f$ .
  - (c) En déduire les solutions dans  $F$  de l'équation différentielle  $(E_0) : y' - y = 0$ .
3. On note  $\varphi$  la fonction définie pour tout  $x \in \mathbb{R}$  par :  $\varphi(x) = e^{-x}$ .
  - (a) Calculer un antécédent par  $f$  des fonctions  $\sin, \cos$  et  $\varphi$ .
  - (b) Montrer que  $(\sin, \cos, \varphi)$  est une base de l'image de  $f$ .
  - (c) En déduire les solutions dans  $F$  de l'équation différentielle  $(E) : y' - y = e^{-x} + \sin(x)$ .