DM 2

# A rendre le 01/10/25

## Exercice 1

**Première partie.**

1. Soit $g$ l'application définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \dfrac{2x^2}{x^2+1} - \ln(x^2+1)$.

   (a) Étudier les variations de $g$, déterminer sa limite en $+\infty$.

   (b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha$ dans l'intervalle $[1, +\infty[$.

   (c) Prouver que $\frac{7}{4} < \alpha < 2$.

2. On note $\Gamma$ la courbe représentative de $g$. (On ne demande pas la construction de $\Gamma$).

   (a) Écrire une équation de la tangente $T$ à $\Gamma$ au point d'abscisse 2.
   Déterminer la valeur exacte de l'abscisse $x_0$ du point d'intersection de $T$ et de l'axe $(Ox)$.
   On note $\nu_1$ et $\nu_2$ respectivement les valeurs approchées par défaut et par excès de $x_0$ à $10^{-3}$ près. Des signes de $g(\nu_1)$ et de $g(\nu_2)$, déduire un encadrement de $\alpha$ à $10^{-3}$ près.

   (b) Préciser le signe de $g$ sur $\mathbb{R}_+$.

**Deuxième partie.**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit $f$ l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 0$ et

$$f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x} \text{ si } x \neq 0.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de $f$.

3. Montrer que $f$ est dérivable en 0. Étudier les variations de $f$ et sa limite en $+\infty$.

4. Montrer que pour tout réel $x > -1$, $\ln(1+x) \leq x$.
   En déduire la position relative de $\mathscr{C}$ et de sa tangente en 0.

5. Tracer la courbe $\mathscr{C}$.

---

## Exercice 2 (Fonction argument sinus hyperbolique)

On définit deux fonction ch et sh sur $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ et } \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x) = 1$.

2. Prouver que la fonction sh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. On note Argsh sa bijection réciproque.

3. Justifier soigneusement que Argsh est impaire.

4. Prouver que Argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

5. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\text{Argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

---