Correction - DM 3

A rendre le 10/10/25

Exercice 1

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} -x & -y & -\lambda z & = & 0 & (L_1 \leftarrow L_3) \\ 2x & -\lambda y & -z & = & 0 & (L_2) \\ -\lambda x & +2y & +2z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} -x & -y & -\lambda z & = & 0 & (L_1) \\ & -(2+\lambda)y & -(1+2\lambda)z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1) \\ & (2+\lambda)y & +(2+\lambda^2)z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 - \lambda L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} -x & -y & -\lambda z & = & 0 & (L_1) \\ & -(2+\lambda)y & -(1+2\lambda)z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2) \\ & & (1-\lambda)^2 z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{array}\right.$$

puisque $(2+\lambda^2) - (1+2\lambda) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 = (1-\lambda)^2$.

- Le système est de Cramer si, et seulement si, $\lambda \notin \{-2, 1\}$. Sous cette condition, puisqu'il est homogène, l'unique solution est $\{(0,0,0)\}$.

- **Étude des cas particuliers :**
  - Si $\lambda = -2$, alors

  $$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -y & +2z & = & 0 \\ & & 3z & = & 0 \\ & & 9z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -y \\ z = 0 \end{array}\right.$$

  et l'ensemble des solutions est $\{(-y, y, 0), y \in \mathbb{R}\}$.

  - Si $\lambda = 1$,alors

  $$(S_1) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcl} -x & -y & -z & = & 0 \\ & -3y & -3z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = -z \end{array}\right.$$

  et l'ensemble des solutions est $\{(0, y, -y), y \in \mathbb{R}\}$.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 3x & +3y & -(4+\lambda)z & = & 0 & (L_1 \leftarrow L_3) \\ 3x & +(2-\lambda)y & -3z & = & 0 & (L_2) \\ (2-\lambda)x & +3y & -3z & = & 0 & (L_3 \leftarrow L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rrrcll} 3x & +3y & -(4+\lambda)z & = & 0 & (L_1) \\ & -(1+\lambda)y & +(1+\lambda)z & = & 0 & (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ & 3(1+\lambda)y & -(1+\lambda)^2 z & = & 0 & (L_3 \leftarrow 3L_3 - (2-\lambda)L_1) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 3x + 3y - (4+\lambda)z = 0 \ (L_1) \\ -(1+\lambda)y + (1+\lambda)z = 0 \ (L_2) \\ (1+\lambda)(2-\lambda)z = 0 \ (L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2) \end{array}\right.$$

puisque $-3 \times 3 - (2-\lambda)(-(4+\lambda)) = -9 + 8 + 2\lambda - 4\lambda - \lambda^2 = -1 - 2\lambda - \lambda^2 = -(1+\lambda)^2$ et $-(1+\lambda)^2 + 3(1+\lambda) = (1+\lambda)(-(1+\lambda)+3) = (1+\lambda)(2-\lambda)$.

- Le système est de Cramer si, et seulement si, $\lambda \notin \{-1, 2\}$. Sous cette condition, puisqu'il est homogène, l'unique solution est $\{(0,0,0)\}$.

- **Étude des cas particuliers :**
  - Si $\lambda = -1$, alors

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & +3y & -3z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ x = -y + z \right.$$

  et l'ensemble des solutions est $\{(-y+z, y, z), (y,z) \in \mathbb{R}^2\}$.

  - Si $\lambda = 2$, alors

$$(S_2) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rrrcl} 3x & +3y & -6z & = & 0 \\ & -3y & +3z & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$$

  et l'ensemble des solutions est $\{(z,z,z), z \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 2

1. (a) On a les ensembles de départ et d'arrivées suivants :
   - arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;
   - arccos : $]-1,1[\to]0,\pi[$;
   - sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
   - th : $\mathbb{R} \to]-1,1[$.

   (b) Les ensembles de départs des fonctions arctan et arccos étant compatibles avec les ensembles d'arrivées des fonction sh et th, l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ est $\mathbb{R}$.

2. (a) Pour la même raison que précédemment, f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la seule fonction pouvant poser des problèmes de dérivation est arccos mais les valeurs en lesquelles elle n'est pas dérivable (-1 et 1) ne sont pas atteintes. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{1+\mathrm{sh}^2(x)} \times \mathrm{ch}(x) + \frac{-1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} \times (1-\mathrm{th}^2(x)) = \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} - \frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2(x)}}{\mathrm{ch}^2(x)} = 0$$

   (b) La fonction f est donc constante sur son ensemble de définition (qui est un intervalle) et vaut

$$f(0) = \arctan(\mathrm{sh}(0)) + \arccos(\mathrm{th}(0)) = \arctan(0) + \arccos(0) = \frac{\pi}{2}.$$

3. (a) On résout l'équation demandée :

$$\begin{aligned} \mathrm{th}(\alpha) = \frac{5}{13} &\Leftrightarrow \frac{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}{e^{\alpha}+e^{-\alpha}} = \frac{5}{13} \\ &\Leftrightarrow 13e^{\alpha} - 13e^{-\alpha} = 5e^{\alpha} + 5e^{-\alpha} \\ &\Leftrightarrow 8e^{\alpha} = 18e^{-\alpha} \\ &\Leftrightarrow e^{2\alpha} = \frac{18}{8} = \frac{9}{4} \\ &\Leftrightarrow e^{\alpha} = \frac{3}{2} \\ &\Leftrightarrow \alpha = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \end{aligned}$$

   Ainsi, l'équation $\mathrm{th}(\alpha) = \dfrac{5}{13}$ possède une unique solution $\alpha = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

(b) A l'aide de la question précédente et de la fonction f, on voit que :

$$\frac{\pi}{2} = \arctan(y) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \arctan(y) + \arccos\left(\operatorname{th}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)\right)$$

est vérifié si $y = \operatorname{sh}\left(\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$. On a donc une solution.

D'autre part, y est solution si et seulement si

$$\arctan(y) = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{5}{13}\right).$$

La fonction arctan étant continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, elle réalise (avec le théorème de la bijection et comme on le sait déjà) une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
La solution trouvée est donc unique.

Exercice 3

1. La fonction $\varphi : x \mapsto \operatorname{gd}(x) - \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions qui le sont (la fonction gd étant dérivable en tant que primitive de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$) et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi'(x) = \operatorname{gd}'(x) - \operatorname{sh}'(x) \times \operatorname{Arctan}'(\operatorname{sh}(x)) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{1+\operatorname{sh}^2(x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} - \frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{ch}^2(x)} = 0.$$

Donc φ est constante sur $\mathbb{R}$ (on utilise ici que $\mathbb{R}$ est un intervalle), égale à $\varphi(0) = \operatorname{gd}(0) - \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(0)) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(x) = 0, \quad \text{ce qui se récrit} \quad \boxed{\operatorname{gd}(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)).}$$

2. gd est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ (car $\operatorname{gd}'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(x)} > 0$). Par théorème de la bijection, gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\operatorname{gd}(\mathbb{R}) = \left]\lim_{x\to-\infty} \operatorname{gd}(x), \lim_{x\to-\infty} \operatorname{gd}(x)\right[$. Avec la question 1 :

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{gd}(x) = \lim_{x\to-\infty} \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = -\frac{\pi}{2} \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \operatorname{gd}(x) = \lim_{x\to+\infty} \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) = \frac{\pi}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{gd réalise une bijection de } \mathbb{R} \text{ sur } I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.}$

3. Soit $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Résolvons l'équation $y = \operatorname{gd}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$:

$$y = \operatorname{gd}(x) \overset{\text{quest. 1}}{\Leftrightarrow} y = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x)) \Leftrightarrow \tan(y) = \operatorname{sh}(x) \Leftrightarrow x = \operatorname{Argsh}(\tan(y)).$$

Ainsi :

$$\boxed{\operatorname{gd}^{-1} : \begin{cases} \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \operatorname{Argsh}(\tan(x)) \end{cases}.}$$

4. gd^{-1} est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ en tant que composée de fonctions qui le sont, et pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'(x) &= \tan'(x) \times \text{Argsh'}(\tan(x)) \quad \text{(avec la question précédente)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{\tan^2(x)+1}} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \times \sqrt{\cos^2(x)} \\
&= \frac{1}{\cos^2(x)} \times \cos(x) \quad \left(\text{car } \cos(x) > 0 \text{ si } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) \\
&\boxed{= \frac{1}{\cos(x)}.}
\end{aligned}$$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$(\mathrm{gd})'(x) = \left(\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'\left(\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)^{-1}(x)\right)} = \frac{1}{\left(\mathrm{gd}^{-1}\right)'(\mathrm{gd}(x))} \boxed{= \cos(\mathrm{gd}(x))}$$

en utilisant la question précédente.

6. La fonction gd' est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions qui le sont (étant donné l'expression obtenue à la question précédente). Donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f''(x) &= 2(\mathrm{gd})''(x) = 2(\mathrm{gd})'(x) \times (-\sin(\mathrm{gd}(x))) \quad \text{(avec la question précédente)} \\
&= -2\cos(\mathrm{gd}(x))\sin(\mathrm{gd}(x)) \quad \text{(encore avec la question précédente)} \\
&= -\sin(2\mathrm{gd}(x)) = -\sin(f(x)).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{f''(x) + \sin(f(x)) = 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}.}$

7. La fonction $\psi : x \mapsto \mathrm{gd}(x) - \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}(x))$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur cet intervalle en tant que composée de telles fonctions (notons pour cela que th est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]-1,1[$, et que Arcsin est dérivable sur $]-1,1[$), et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\psi'(x) &= \mathrm{gd}'(x) - \mathrm{th}'(x) \times \mathrm{Arcsin}'(\mathrm{th}(x)) \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{th}^2(x)}} \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{1}{\mathrm{ch}^2(x)} \times \sqrt{\mathrm{ch}^2(x)} \\
&= \frac{1}{\mathrm{ch}(x)} - \frac{\mathrm{ch}(x)}{\mathrm{ch}^2(x)} \quad (\text{car } \mathrm{ch}(x) \geq 0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

La fonction ψ est donc constante sur l'intervalle $\mathbb{R}$, égale à $\psi(0) = \mathrm{gd}(0) - \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}(0)) = 0 - 0 = 0$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\psi(x) = 0, \quad \text{soit encore} \quad \boxed{\mathrm{gd}(x) = \mathrm{Arcsin}(\mathrm{th}(x)).}$$

8. La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de telles fonctions, et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$h'(x) = e^x \times \mathrm{Arctan}'(e^x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}} = \frac{1}{e^x + e^{-x}} = \frac{1}{2\mathrm{ch}(x)} = \frac{1}{2}\mathrm{gd}'(x).$$

Par conséquent, il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{gd}(x) + c.$$

Comme de plus, $h(0) = \mathrm{Arctan}(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et $\mathrm{gd}(0) = 0$, alors $c = \dfrac{\pi}{4}$ et :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{2}\mathrm{gd}(x) + \frac{\pi}{4}.}$$
