A rendre le 10/10/25

Exercice 1

Résoudre, en discutant suivant les valeurs du paramètre $\lambda \in \mathbb{R}$, les systèmes suivants :

$$(S_1) \begin{cases} -\lambda x + 2y + 2z = 0 \\ 2x - \lambda y - z = 0 \\ -x - y - \lambda z = 0 \end{cases} \quad (S_2) \begin{cases} (2-\lambda)x + 3y - 3z = 0 \\ 3x + (2-\lambda)y - 3z = 0 \\ 3x + 3y - (4+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

Exercice 2

On considère la fonction $f(x) = \arctan(\operatorname{sh}(x)) + \arccos(\operatorname{th}(x))$.

1. (a) Donner les domaines de définition et d'arrivée de $\arctan$, $\arccos$, sh et th .
 (b) En déduire le domaine de définition $\mathcal{D}$ de f ?
2. (a) Pour quels x peut-on calculer $f'(x)$? Dans ce cas, prouver que $f'(x) = 0$.
 (b) Simplifier alors $f(x)$ pour tout $x \in \mathcal{D}$.
3. (a) Résoudre l'équation $\operatorname{th}(\alpha) = \frac{5}{13}$.
On écrira $\operatorname{th}(\alpha)$ à l'aide d'exponentielles et on obtiendra une expression de α à l'aide de la fonction $\ln$.
 (b) En déduire la (les) solution(s) y de l'équation : $\arctan(y) + \arccos\left(\frac{5}{13}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (La fonction de Gudermann)

On appelle *fonction de Gudermann*, ou *gudermannien*, et on note $\operatorname{gd} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, l'unique primitive de $x \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(x)}$ qui s'annule en 0.

1. Justifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{Arctan}(\operatorname{sh}(x))$.

Partie I. Gudermannien et pendule simple.

2. Montrer que gd réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3. Exprimer la bijection réciproque $\operatorname{gd}^{-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ en fonction (notamment) de Argsh .
4. Montrer que gd^{-1} est dérivable et que pour tout $x \in I$, $(\operatorname{gd}^{-1})'(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.
5. Déduire de ce qui précède que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\operatorname{gd})'(x) = \cos(\operatorname{gd}(x))$.
6. Prouver que la fonction $f = 2\operatorname{gd}$ est dérivable, et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) + \sin(f(x)) = 0$.

En d'autres termes, nous venons de prouver que la fonction $2\operatorname{gd}$ est solution de l'équation différentielle $y'' + \sin(y) = 0$. Cette équation est celle qui régit le mouvement d'une masse située au bout d'une tige rigide en l'absence de frottement.

Partie II. Deux identités sur le gudermannien.

7. Prouver que pour tout réel x , $\operatorname{gd}(x) = \operatorname{Arcsin}(\operatorname{th}(x))$.
8. Prouver que $h : x \mapsto \operatorname{Arctan}(e^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.
 En déduire une relation entre h et gd .