Correction - DM 4

A rendre le Mardi 4 Novembre

Exercice 1 (Construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

1. Il s'agit des racines 5-ième de l'unité, à savoir les $\boxed{e^{2ik\pi/5} \text{ avec } k \in [\![0,4]\!].}$

2. (a) On remarque que :
$$z^5 - 1 = z^5 - 1^5 = (z-1)(z^4 + z^3 + z^2 + z + 1).$$
Ainsi, $\boxed{Q(z) = z^4 + z^3 + z^2 + z + 1.}$

(b) Remarquons que $z = 0$ n'est pas solution. On peut donc diviser l'équation par z^2 :
$$Q(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + z + \frac{1}{z} + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^2 + Z - 1 = 0.$$
Cette dernière équation admet pour racines réelles $\dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$. On est amené à résoudre les équations suivantes :

- On résout :
$$Z = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1+\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0.$$
Cette équation admet pour racines les complexes :
$$z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2})}}{2}.$$
- On résout de même :
$$Z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z + \frac{1}{z} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow z^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2} z + 1 = 0.$$
Cette équation admet pour racines complexes :
$$z_3 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2} \quad \text{et} \quad z_4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.$$

Les quatre $\boxed{\text{racines complexes de } Q \text{ sont donc } z_1, z_2, z_3, z_4.}$

3. (a) Les solutions trouvées à la question 1 et à la 2.(b) sont égales une à une.
Comme $0 < \frac{2\pi}{5} < \frac{\pi}{2}$, le complexe $e^{2i\pi/5}$ a une partie réelle et une partie imaginaire positives. D'où :
$$e^{2i\pi/5} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} - i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}$$
et donc :
$$\boxed{\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.}$$
Comme $\frac{\pi}{2} < \frac{4\pi}{5} < \pi$, le complexe $e^{4i\pi/5}$ a une partie réelle négative et une partie imaginaire positive. D'où :
$$e^{4i\pi/5} = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} + i\frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}$$
et donc :
$$\boxed{\cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}(\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2})}}{2}.}$$

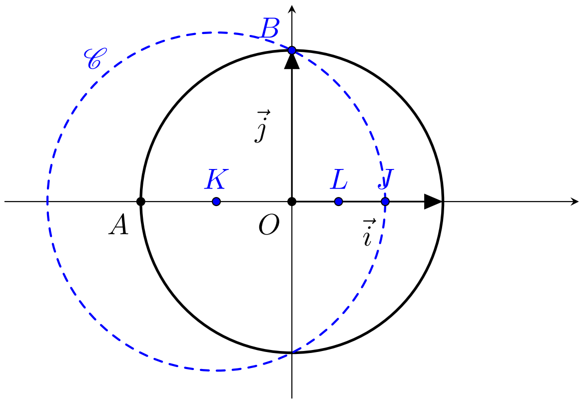
(b) Avec les formules trigonométriques,

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) - 1 \quad \text{donc} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) + \frac{1}{2}.$$

Avec la question précédente et après simplification, on obtient $\cos^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{5}+3}{8}$ et donc $\boxed{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{\sqrt{5}+3}}{2\sqrt{2}}}$ (car $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) > 0$).

4. (a) Puisque les points $A_0, \dots, A_4$ ont pour affixe les racines 5-ièmes de l'unité, le polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$ est un pentagone régulier.

(b) On construit à la règle et au compas le cercle de centre O et de rayon 1 cm, les points O, B, K (en traçant la bissectrice du segment $[A, O]$), J et L (en traçant la bissectrice du segment $[O, J]$).



(c) D'après le théorème de Pythagore dans le triangle KOB rectangle en O :

$$BK^2 = KO^2 + OB^2 = \frac{5}{4} \quad \text{donc} \quad BK = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Puisque K est le centre du cercle passant par B et J, $BK = KJ = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

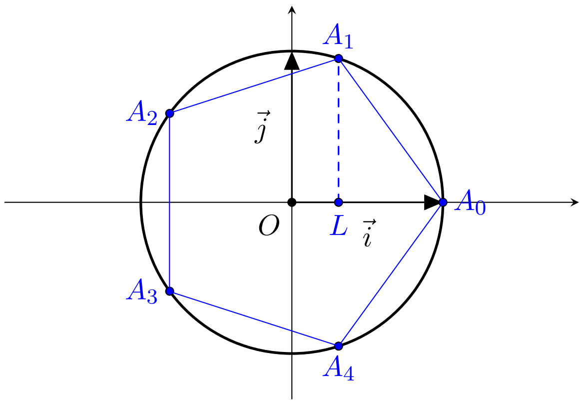
Les points K, O et J étant alignés, $\boxed{OJ = KJ - KO = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.}$

Par hypothèse, L est le milieu de $[OJ]$. Donc $\boxed{OL = \frac{1}{2}OJ = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.}$

A_1 a pour affixe $e^{2i\pi/5}$, c'est-à-dire $\cos(\frac{2\pi}{5}) + i\sin(\frac{2\pi}{5})$ et $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$.

Comme L est sur l'axe des abscisses et que $\cos(\frac{2\pi}{5}) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}$, L est bien la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.

(d) Une fois construit le point L, on trace à la règle et au compas la perpendiculaire à l'axe des abscisses qui passe par L. Les points d'intersections de cette droite avec le cercle unité sont A_0 (d'ordonnée positive) et A_1. On obtient alors A_2 en traçant le cercle de centre A_1 de rayon A_0A_1, puis de même A_3. D'où une construction du pentagone régulier à la règle et au compas.



Le saviez-vous ?

Vous savez depuis longtemps construire à l'aide d'une règle (non graduée) et d'un compas :

- la bissectrice d'un angle ;
- la médiatrice d'un segment ;
- la perpendiculaire à une droite passant par un point ;
- un hexagone régulier inscrit dans un cercle donné...

Mais quelles autres constructions sont possibles uniquement à la règle et au compas ? Peut-on par exemple couper un angle en 3 ? Ou construire un polygone régulier à 7 côtés ?

Quelques définitions

Dans toute la suite, on considère deux points distincts O et I du plan. Soit P un ensemble de points du plan. On considère les 2 catégories d'objets suivants :

(1) les droites (AB), où A et B sont des éléments de P.

(2) les cercles centrés en un point de P, et de rayon AB, où A et B sont des éléments de P.

Ces 2 catégories d'objets sont donc tous les cercles et toutes les droites que l'on peut construire à partir des points de P.

Un point M du plan est dit *constructible à la règle et au compas en une étape* à partir de P s'il existe deux éléments distincts de (1) et (2) dont M est point d'intersection.

Un point M est dit *constructible à la règle et au compas à partir de* P s'il existe des points $M_1, \dots, M_n$ tels que M_i soit constructible en une étape à partir de P et des points précédemment construits.

Lorsque l'ensemble des points que l'on se donne au départ est constitué de O et de I, on dit simplement que M *est constructible* (à la règle et au compas).

Constructibilité des polygones réguliers

On a montré dans cet exercice que le pentagone régulier (plus précisément ses sommets) est constructible à la règle et au compas. Et on en a donné une construction !

On peut montrer le résultat suivant dû à Wantzel, qui caractérise exactement les polygones réguliers constructibles à la règle et au compas.

Le polygone régulier à n côtés est constructible à la règle et au compas si, et seulement si, n est de la forme :

$$n = 2^k \times p_1 \times \cdots \times p_r$$

où $k, r \in \mathbb{N}$ et $p_1, \ldots, p_r$ sont des nombres premiers de Fermat.

Rappelons qu'un nombre premier p est dit premier de Fermat s'il est de la forme $2^{2^q} + 1$. On ne connait que 5 nombres premiers de Fermat : 3, 5, 17, 257, 65537. On ignore s'il en existe d'autres...
Ainsi, on peut tracer à la règle et au compas un polygone régulier à 15 ou $68 = 2^2 \times 17$ côtés, mais pas un polygone régulier à 7 ou $25 = 5^2$ côtés. Et bien que ce résultat assure la constructibilité (ou non) d'un polygone régulier, il ne donne aucune méthode de construction effective d'un tel polygone.

D'autres constructions impossibles à la règle et au compas

Les problèmes de constructibilité à la règle et au compas sont liés à la théorie des corps, et particulièrement à la notion de degré d'extension de corps. On peut montrer à l'aide de ces notions les résultats suivants :

- **la trisection d'un angle :** à part pour des angles particuliers, il est en général impossible de couper un angle en 3 angles égaux, uniquement à la règle et au compas.
- **la quadrature du cercle :** il est impossible, étant donné un cercle, de construire un carré de même aire, uniquement à l'aide de la règle et du compas.
- **la duplication du cube :** si on a un patron de cube, il est impossible de construire un patron de cube dont le volume soit double du premier.

Et avec seulement un compas ?

Enfin, on peut se contenter d'étudier les points qui sont constructibles au compas seul. Et, bizarrement, ce sont les mêmes que ceux qui sont constructibles à la règle et au compas ! C'est le théorème de Mohr-Mascheroni.

Exercice 2

1. (a) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$, on a :

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z+i)^5 - (z-i)^5 = 0 \Leftrightarrow (z+i)^5 = (z-i)^5 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1.$$

(b) Commençons par noter que $P(i) = \dfrac{(2i)^5}{2i} \neq 0$ et donc i n'est pas racine de P.

Soit à présent $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Alors z est racine de P si et seulement si $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$, soit encore si et seulement si $\dfrac{z+i}{z-i} \in \mathbb{U}_5 = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{5}}, 0 \leq k \leq 4\right\}$.
Donc z est racine de P si et seulement si il existe $k \in [\![0,4]\!]$ tel que $z + i = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z-i)$.
Pour $k = 0$, cette équation s'écrit encore $z + i = z - i$, qui n'a pas de solution.

Et pour $k \in [\![1,4]\!]$, on a :

$$\begin{aligned} z+i = e^{\frac{2ik\pi}{5}}(z-i) &\Leftrightarrow z\left(1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) = i\left(1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}\right) \\ &\Leftrightarrow z = i\frac{1+e^{\frac{2ik\pi}{5}}}{1-e^{\frac{2ik\pi}{5}}} \\ &\Leftrightarrow z = i\frac{e^{\frac{ik\pi}{5}}}{e^{\frac{ik\pi}{5}}}\frac{e^{-\frac{ik\pi}{5}}+e^{\frac{ik\pi}{5}}}{e^{-\frac{ik\pi}{5}}-e^{\frac{ik\pi}{5}}} \\ &\Leftrightarrow z = i\frac{2\cos\left(\frac{k\pi}{5}\right)}{2i\sin\left(\frac{k\pi}{5}\right)} = \frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)} \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation est } \left\{\frac{1}{\tan\left(\frac{k\pi}{5}\right)}, k \in [\![1,4]\!]\right\}}$.

2. (a) C'est tout simplement du binôme de Newton : pour tout $z \in \mathbb{C}$,

$$\begin{aligned} P(z) &= \frac{1}{2i}\left(z^5+5iz^4+10i^2z^3+10i^3z^2+5i^4z+i^5-\left(z^5-5iz^4+10i^2z^3-10i^3z^2+5i^4z-i^5\right)\right) \\ &= \frac{1}{2i}\left(10iz^4-20iz^2+2i\right) = \boxed{5z^4-10z^2+1}. \end{aligned}$$

(b) Soit $z \in \mathbb{C}$, notons $Z = z^2$. Alors (après avoir calculer Δ),

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow 5Z^2-10Z+1 = 0 \Leftrightarrow Z = 1 \pm 2\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

On en déduit que $\boxed{\text{les racines de } P \text{ sont } \pm\sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}} \text{ et } \pm\sqrt{1-2\frac{\sqrt{5}}{5}}.}$

(c) Sut $]0,\pi[$, la fonction cotan est dérivable car quotient de fonctions qui le sont, et on a alors, pour tout $x \in]0,\pi[$,

$$\text{cotan}'(x) = \frac{-\sin^2(x)-\cos^2(x)}{\sin^2(x)} = -\frac{1}{\sin^2(x)} < 0.$$

Donc $\boxed{\text{cotan est strictement décroissante sur }]0,\pi[.}$

(d) Le résultat de la question 1 prouve que les 4 racines de P sont $\text{cotan}(\frac{k\pi}{5})$ pour $k \in [\![1,4]\!]$.

(e) Donc par décroissante de cotan, $\text{cotan}(\frac{\pi}{5})$ est la plus grande des racines de P.
Or avec l'expression des racines obtenues par la deuxième méthode, il est facile de constater que la plus grande d'entre elles est $\sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}}$. Donc $\boxed{\text{cotan}(\frac{\pi}{5}) = \sqrt{1+2\frac{\sqrt{5}}{5}}}$.

Exercice 3

1. Il s'agit donc de calculer $\left|e^{i\alpha}-e^{i\beta}\right|$. Mais :

$$e^{i\alpha}-e^{i\beta} = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(e^{i\frac{\alpha-\beta}{2}}-e^{-i\frac{\alpha-\beta}{2}}\right) = e^{i\frac{\alpha+\beta}{2}}2i\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

Et donc :

$$\left|e^{i\alpha}-e^{i\beta}\right| = 2|i|\left|\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right| \boxed{= 2\left|\sin\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)\right|}.$$

Partie I. Le cas où $\dfrac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$.

2. Soient $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ tels que $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{p}{q}$, de sorte que $\alpha = \frac{p}{q}\pi$. Alors :

$$z_{2q} = e^{2iqp\pi} = 1 \quad \text{et donc} \quad 2q \in A.$$

Ainsi, $\boxed{A \neq \emptyset.}$

3. (a) Par définition de m, $\left(e^{i\theta}\right)^m = 1$, et donc $e^{i(m-1)\theta}e^{i\theta} = 1$, si bien que :

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{i(m-1)\theta} = z_{m-1}.$$

D'où $\boxed{\text{l'existence d'un entier } p = m-1 \in \mathbb{N} \text{ tel que } \frac{1}{e^{i\theta}} = z_p.}$

Notons $V_+ = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$ et $V_- = \{z_n, n \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}\}$, de sorte que $V = V_+ \cup V_-$. Montrons que $V = V_+$ par double inclusions.

$\boxed{\supset}$ De manière immédiate, $V_+ \subset V_+ \cup V_- = V$.

$\boxed{\subset}$ Soit k est un entier strictement négatif. Alors :

$$z_k = \left(e^{i\theta}\right)^k = \left(\frac{1}{e^{i\theta}}\right)^{-k} = \left(e^{ip\theta}\right)^{-k} = z_{-kp}.$$

Et donc $V_- \subset V_+$, si bien que $V = V_+ \cup V_- \subset V_+$.

Ainsi, $\boxed{V = V_+ = \{z_n,\, n \in \mathbb{N}\}.}$

(b) Soit $z \in V$. Par la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $z = z_n = e^{in\theta}$. Et alors :

$$z^m = e^{inm\theta} = \left(e^{im\theta}\right)^n = 1^n = 1.$$

D'où $z \in \mathbb{U}_m$. On a donc déjà $V \subset \mathbb{U}_m$.

Puisque nous savons que $\mathbb{U}_m$ contient exactement m éléments, prouvons qu'il en est de même de V, en prouvant que $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ sont deux à deux distincts.

Supposons par l'absurde qu'il existe $p, q \in [\![0, m-1]\!]$, distincts, avec $z_p = z_q$. Quitte à les échanger, supposons que $p \leq q$. Alors :

$$z_p = z_q \;\Leftrightarrow\; e^{ip\theta} = e^{iq\theta} \;\Leftrightarrow\; 1 = e^{i(q-p)\theta} \;\Leftrightarrow\; z_{q-p} = 1.$$

Ceci prouve que $q - p \in A$. Mais puisque $q - p \leq m - 1 < m$, ceci contredit la minimalité de m dans A.

Ainsi, $z_0, z_1, \ldots, z_{m-1}$ sont deux à deux distincts, si bien que V contient au plus m éléments distincts. Étant inclus dans $\mathbb{U}_m$ de cardinal m, on peut conclure que $\boxed{V = \mathbb{U}_m.}$

Partie II. Le cas où $\dfrac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$.

4. Soient $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $z_{n_1} = z_{n_2}$. Alors $e^{in_1\alpha} = e^{in_2\alpha}$, si bien que $n_1\alpha \equiv n_2\alpha[2\pi]$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$(n_1 - n_2)\,\alpha = 2k\pi.$$

Si on avait $n_1 \neq n_2$, alors on aurait $\dfrac{\alpha}{\pi} = \dfrac{2k}{n_1 - n_2} \in \mathrm{Q}$, ce qui est absurde. Donc $n_1 = n_2$. Ainsi, $\boxed{\text{les } z_n \text{ sont deux à deux distincts.}}$

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$:
$$\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{2\pi}{\varepsilon}.$$
Cette condition est par exemple vérifiée pour $n = \left\lfloor \frac{2\pi}{\varepsilon} \right\rfloor + 2$, qui est bien supérieur ou égal à 2 .

6. Vérifions les trois conditions qui définissent une partition.

   - Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \in A_k$, si bien que $A_k \neq \emptyset$.
   - Soit $z \in \mathbb{U}$, et soient $\alpha = \mathrm{Arg}(z) \in [0, 2\pi[$ et $k = \left\lfloor \frac{n\alpha}{2\pi} \right\rfloor$. Alors :
   $$k \leq \frac{n\alpha}{2\pi} < k+1, \quad \text{d'où} \quad \frac{2k\pi}{n} \leq \alpha < \frac{2(k+1)\pi}{n}$$
   et donc $z \in A_k$. Ainsi, $\mathbb{U} \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$. L'inclusion réciproque étant évidente, on obtient $\mathbb{U} = \bigcup_{k=0}^{n-1} A_k$.
   - Reste à prouver que les A_k sont deux à deux disjoints. Soient pour cela k, k' tels que $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset$, et soit $z \in A_k \cap A_{k'}$.

     Puisque $z \in A_k$ et $z \in A_{k'}$:
   $$\frac{2k\pi}{n} \leq \mathrm{Arg}(z) < \frac{2\,(k'+1)}{n}, \quad \text{d'où} \quad \frac{2k\pi}{n} < \frac{2\,(k'+1)\,\pi}{n}$$
   et donc $2k < 2(k'+1)$. Puisque nous sommes en présence d'entiers, on en déduit que $2k \leq 2(k'+1) - 1 = 2k' + 1$. Et puisque ces entiers sont de parité distincte, il suit que $2k \leq 2k'$, et donc $k \leq k'$. En échangeant k et k', on prouve de même que $k' \leq k$, et donc $k = k'$.

     On a ainsi montré l'implication $A_k \cap A_{k'} \neq \emptyset \Rightarrow A_k = A_{k'}$ qui permet de conclue que les A_k sont deux à deux disjoints.

   Nous avons bien vérifié les trois conditions définissant une partition de $\mathbb{U}$, donc $\boxed{\{A_k, k \in [\![0, n-1]\!]\} \text{ est une partition de } \mathbb{U}.}$

7. (a) Les $n+1$ complexes $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{U}$ sont deux à deux distincts, et sont tous dans un des n ensembles $A_0, \ldots, A_{n-1}$ (étant donné que ces ensembles forment une partition de $\mathbb{U}$). Donc il existe[1] $k \in [\![0, n-1]\!]$ tel que A_k contienne au moins deux éléments z_p et z_q avec $p, q \in [\![0, n-1]\!]$ distincts, soit $\boxed{\{z_p, z_q\} \subset A_k.}$

   (b) Calculons :
   $$\begin{aligned}\mathrm{Arg}(z_{q-p}) = \mathrm{Arg}(e^{i\theta(q-p)}) = \mathrm{Arg}\left(\frac{e^{i\theta q}}{e^{i\theta p}}\right) = \mathrm{Arg}\left(\frac{z_q}{z_p}\right)\\ \equiv \mathrm{Arg}(z_q) - \mathrm{Arg}(z_p)\,[2\pi] \equiv \psi - \varphi\,[2\pi].\end{aligned}$$
   Mais puisque z_p et z_q sont dans A_k, alors $\frac{2k\pi}{n} \leq \varphi < \frac{2(k+1)\pi}{n}$ et $\frac{2k\pi}{n} < \psi \leq \frac{2(k+1)\pi}{n}$, et donc $-\frac{2\pi}{n} \leq \psi - \varphi \leq \frac{2\pi}{n}$. Et puisque de plus $\psi - \varphi \geq 0$, on en déduit que $\boxed{\mathrm{Arg}\,(z_{q-p}) = \psi - \varphi \in \left]0, \frac{2\pi}{n}\right[.}$

   (c) Il s'agit de majorer $d\left(Z, z_{k(q-p)}\right) = \left|e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}\right|$. Par la question 1 :
   $$\left|e^{i\alpha} - e^{k(\psi-\varphi)}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{\alpha - k(\psi-\varphi)}{2}\right)\right|.$$

[1] On utilise ici ce qu'on appelle le *principe des tiroirs* que nous verrons lors du chapitre de dénombrement : si on range n chaussettes dans p tiroirs et que $n > p$, alors il existe au moins un tiroir qui contient au moins deux chaussettes.

Par définition de la partie entière :

$$k \leq \frac{\alpha}{\psi-\varphi} < k+1 \quad \text{et donc} \quad 0 \leq \alpha - k(\psi-\varphi) < \psi - \varphi.$$

Ainsi :

$$0 \leq \frac{\alpha - k(\psi-\varphi)}{2} < \frac{\psi-\varphi}{2} < \frac{2\pi}{2n} \leq \frac{\pi}{2}.$$

Par croissance de la fonction sinus sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$0 \leq \sin\left(\frac{\alpha - k(\psi-\varphi)}{2}\right) < \sin\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right)$$

Et donc comme demandé :

$$d\left(Z, z_{k(q-p)}\right) \leq 2\sin\left(\frac{\psi-\varphi}{2}\right).$$

(d) À l'aide de l'inégalité classique $\sin(x) \leq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on obtient :

$$d\left(Z, z_{k(q-p)}\right) \leq 2\frac{\psi-\varphi}{2} \leq \psi - \varphi \leq \frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon.$$

Et donc nous avons bien prouvé l'existence d'un entier m tel que $d\left(Z, z_m\right) \leq \varepsilon$.

Nous avons ainsi montré qu'il existe des éléments de V aussi proche que l'on souhaite de n'importe quel nombre complexe de module 1. On dit que la partie V est *dense* dans $\mathbb{U}$.

8. Prouvons qu'aucune racine de l'unité n'est dans V, hormis $0 = z_0$.

   Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $z_n \in \mathbb{U}_p$. Alors :

$$z_n^p = 1, \quad \text{d'où} \quad \theta n p \equiv 0[2\pi], \quad \text{et donc} \quad \theta \equiv 0\left[\frac{2\pi}{np}\right].$$

   Par conséquent, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \dfrac{2k\pi}{np}$, si bien que $\dfrac{\theta}{\pi} = \dfrac{2k}{np} \in \mathbb{Q}$, contredisant notre hypothèse. Donc $\boxed{V \text{ n'est pas égal à } \mathbb{U}.}$

9. Soit $x \in [-1, 1]$, et soit $Z = x + i\sqrt{1-x^2}$, qui est un nombre complexe de module 1, donc dans $\mathbb{U}$. Soit également $\varepsilon > 0$ fixé.

   Par ce qui précède, il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$|Z - z_m| \leq \varepsilon, \quad \text{où} \quad z_m = e^{im\theta}.$$

   Et alors :

$$|x - \cos(m\theta)| = |\mathrm{Re}\,(x - z_m)| \leq |x - z_m| \leq \varepsilon.$$

   Si $m \in \mathbb{N}$, alors on a répondu à la question. Sinon, $-m \in \mathbb{N}$, et $\cos(m\theta) = \cos(-m\theta)$, donc il existe bien un entier $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \cos(k\theta)| \leq \varepsilon$.

   Ceci signifie que pour tout nombre x de $[-1, 1]$ il existe des $\cos(k\theta)$ aussi proches de x que l'on veut. Nous dirons bientôt que $\{\cos(k\theta),\, k \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[-1, 1]$.