

A rendre le Mardi 4 Novembre

Vous traiterez au choix :

- les exercices 1 et 2 ;
- l'exercice 3 (plus difficile).

Exercice 1 (Construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

Le but de cet exercice est de construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Plus précisément, on cherchera à établir des formules permettant de calculer $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$ à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés (c'est-à-dire à l'aide de racines carrées, par exemple $\sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{c} + d + \sqrt{e} + \dots}}$).

Pour faire la question 4. la valeur donnée en 3.(a) suffit.

Soit l'équation :

$$z^5 - 1 = 0 \quad (1)$$

1. Donner les solutions de (1) dans $\mathbb{C}$ sous forme trigonométrique.

2. On va chercher les solutions sous une autre forme :

(a) Déterminer le polynôme Q tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait :

$$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z).$$

(b) Résoudre l'équation $Q(z) = 0$ en effectuant le changement d'inconnue défini par :

$$z + \frac{1}{z} = Z.$$

Vérifier que les quatre zéros complexes de Q , que l'on calculera, s'exprime à l'aide de racines carrées, éventuellement superposés.

3. De la question précédente, déduire des expressions par radicaux de :

(a) $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \left(= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} \right) ; \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) ; \quad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right).$

(b) $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$

4. Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas :

On note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

Dans le repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, on considère les points B d'affixe i , K d'affixe $-\frac{1}{2}$.

On note A_k les points d'affixes ω^k pour $k = 0, 1, 2, 3, 4$.

(a) Que dire, sans justifier, du polygone $A_0A_1A_2A_3A_4$?

Soit J le point d'intersection du cercle de centre K passant par B avec la droite $(O, \vec{e}_1)$ d'affixe positive.

Soit L le milieu de $[OJ]$.

(b) Construire sur une figure : le cercle de centre O de rayon 1 et les points O, B, K, J .

(c) Calculer $\overline{OJ}$ puis $\overline{OL}$. En déduire que L est la projection orthogonale de A_1 sur l'axe des abscisses.

(d) Construire à la règle et au compas les points A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 .

Exercice 2 (Résolution d'une équation polynomiale)

Dans tout l'exercice, on note $P : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
 $z \longmapsto \frac{1}{2i} ((z+i)^5 - (z-i)^5)$, qui est donc une fonction polynomiale de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

On se propose de déterminer par deux méthodes différentes les racines de P , c'est-à-dire les complexes tels que $P(z) = 0$.

1. Première méthode.

- Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{i\}$. Montrer que $P(z) = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^5 = 1$.
- En déduire toutes les racines de P , que l'on simplifiera autant que possible à l'aide de la méthode de l'angle moitié.

2. Seconde méthode.

- Prouver que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 5z^4 - 10z^2 + 1$.
- À l'aide de la question précédente, déterminer les racines de P . Les expressions de ces racines ne seront pas forcément les mêmes que celles obtenues dans la première question.
- Étudier les variations de la fonction cotan :
$$\begin{array}{ccc}]0, \pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \end{array}$$
- En combinant les résultats des deux méthodes, déterminer la valeur de $\cotan\left(\frac{\pi}{5}\right)$.

Exercice 3 (Puissances d'un complexe de module 1)

On note :

- $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 ;
- pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} \mid z^n = 1\}$ l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité ;
- pour $z, z' \in \mathbb{C}$, $d(z, z') := |z - z'|$ est la distance entre les points d'affixes z et z' ;
- pour $z \in \mathbb{C}^*$, on note $\arg(z)$ l'unique argument de z qui est dans $[0, 2\pi[$.

Dans tout l'exercice, θ est un réel fixé de $[0, 2\pi[$, et pour $n \in \mathbb{Z}$, on note $z_n = (e^{i\theta})^n$.

On note alors $V = \{z_n, n \in \mathbb{Z}\}$, l'ensemble des puissances de $e^{i\theta}$.

- Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Exprimer $d(e^{i\alpha}, e^{i\beta})$ en fonction de $\frac{\beta - \alpha}{2}$.

Partie I. Le cas où $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$

Dans cette partie, on suppose que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$. On note alors $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid z_n = 1\}$.

- Montrer que $A \neq \emptyset$. On admet alors que, comme toute partie non vide de $\mathbb{N}$, A admet un plus petit élément.

Dans la suite de cette partie, on note m le plus petit élément de A , c'est-à-dire un entier $m \in A$ tel que pour tout $n \in A$, $m \leq n$

- Justifier qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{e^{i\theta}} = z_p$. En déduire que $V = \{z_n, n \in \mathbb{N}\}$.
 - Prouver que $V = \mathbb{U}_m$. Indication : on pourra utiliser une division euclidienne par m . Ceci prouve donc que V est un ensemble fini.

Partie II. Le cas où $\frac{\theta}{\pi} \notin \mathbb{Q}$

Dans cette partie, on suppose que $\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel.

4. Justifier que les z_n , $n \in \mathbb{Z}$ sont deux à deux distincts.

Dans toute la suite, on se donne $Z \in \mathbb{U}$ et $\varepsilon > 0$ fixés. On souhaite prouver qu'il existe $m \in \mathbb{Z}$ tel que $d(Z, z_m) \leq \varepsilon$. Autrement dit, on souhaite prouver qu'il existe des points de V aussi proches qu'on veut d'un point de $\mathbb{U}$.

5. Prouver qu'il existe $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ tel que $\frac{2\pi}{n} \leq \varepsilon$.

Dans la suite, on se fixe un tel entier n . On note alors, pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,

$$A_k = \left\{ z \in \mathbb{U} \mid \frac{2k\pi}{n} \leq \arg(z) < \frac{2(k+1)\pi}{n} \right\}.$$

6. Prouver que $\{A_k, k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket\}$ est une partition de $\mathbb{U}$.
7. (a) Montrer qu'il existe $(p, q) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ et $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tels que $p \neq q$ et $\{z_p, z_q\} \subset A_k$.

On note alors p, q deux tels entiers, et on note $\varphi = \arg(z_p)$ et $\psi = \arg(z_q)$. Quitte à les échanger, on suppose de plus que $\varphi \leq \psi$.

- (b) Montrer que $\arg(z_{q-p}) \in]0, \frac{2\pi}{n}[$.

- (c) On note $\alpha = \arg(Z)$ et $k = \left\lfloor \frac{\alpha}{\psi - \varphi} \right\rfloor$.

Montrer que $d(Z, z_{k(q-p)}) \leq 2 \sin\left(\frac{\psi - \varphi}{2}\right)$.

- (d) Conclure.

8. A-t-on $V = \mathbb{U}$?

9. Dédurre de ce qui précède que pour tout $x \in [-1, 1]$, et tout $\varepsilon > 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $|x - \cos(k\theta)| \leq \varepsilon$.