

## A rendre le Mardi 3 Novembre

### Exercice 1 (Construction du pentagone régulier à la règle et au compas)

Le but de cet exercice est de construire un pentagone régulier à la règle et au compas. Plus précisément, on cherchera à établir des formules permettant de calculer  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)$  à l'aide de combinaisons finies de radicaux carrés (c'est-à-dire à l'aide de racines carrées, par exemple  $\sqrt{a + \sqrt{b - \sqrt{c} + d + \sqrt{e} + \dots}}$ ).

Pour faire la question 4. la valeur donnée en 3.(a) suffit.

Soit l'équation :

$$z^5 - 1 = 0 \quad (1)$$

1. Donner les solutions de (1) dans  $\mathbb{C}$  sous forme trigonométrique.
2. On va chercher les solutions sous une autre forme :

(a) Déterminer le polynôme  $Q$  tel que, pour tout  $z \in \mathbb{C}$ , on ait :

$$z^5 - 1 = (z - 1)Q(z).$$

(b) Résoudre l'équation  $Q(z) = 0$  en effectuant le changement d'inconnue défini par :

$$z + \frac{1}{z} = Z.$$

Vérifier que les quatre zéros complexes de  $Q$ , que l'on calculera, s'exprime à l'aide de racines carrées, éventuellement superposés.

3. De la question précédente, déduire des expressions par radicaux de :

(a)  $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) \left(= \frac{-1 + \sqrt{5}}{4}\right) ; \quad \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right) ; \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) ; \quad \sin\left(\frac{4\pi}{5}\right).$

(b)  $\cos\left(\frac{\pi}{5}\right).$

4. Construction d'un pentagone régulier à la règle et au compas :

On note  $\omega = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ .

Dans le repère orthonormé  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ , on considère les points  $B$  d'affixe  $i$ ,  $K$  d'affixe  $-\frac{1}{2}$ .

On note  $A_k$  les points d'affixes  $\omega^k$  pour  $k = 0, 1, 2, 3, 4$ .

(a) Que dire, sans justifier, du polygone  $A_0A_1A_2A_3A_4$  ?

Soit  $J$  le point d'intersection du cercle de centre  $K$  passant par  $B$  avec la droite  $(O, \vec{e}_1)$  d'affixe positive.

Soit  $L$  le milieu de  $[OJ]$ .

- (b) Construire sur une figure : le cercle de centre  $O$  de rayon 1 et les points  $O, B, K, J$ .
- (c) Calculer  $\overline{OJ}$  puis  $\overline{OL}$ . En déduire que  $L$  est la projection orthogonale de  $A_1$  sur l'axe des abscisses.
- (d) Construire à la règle et au compas les points  $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4$ .

## Exercice 2 (Résolution de trois équations de degré 3)

Le but de ce problème est de résoudre par trois méthodes différentes des équations polynomiales de degré 3 à coefficients complexes.

### Partie I. Recherche d'une solution imaginaire pure

Dans cette partie on considère l'équation  $(E_1) : z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12-6i = 0$ , d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

1. Montrer que  $(E_1)$  possède une unique solution imaginaire pure  $z_0$  que l'on déterminera.
2. En factorisant  $z^3 + (1+i)z^2 + (4-i)z + 12-6i$  par  $z - z_0$ , terminer la résolution de  $(E_1)$ .

### Partie II. Méthode de Cardan

Dans cette partie, on considère l'équation  $(E_2) : z^3 - 3iz + 1 - i = 0$ , d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

3. Soit  $z \in \mathbb{C}$  une solution de  $(E_2)$ .

(a) Justifier qu'il existe des complexes  $u$  et  $v$  tels que 
$$\begin{cases} u + v = z \\ uv = i \end{cases}.$$

Dans la suite de la question, 3 on fixe de tels complexes  $u$  et  $v$ .

- (b) Donner la valeur de  $u^3v^3$ , puis celle de  $u^3 + v^3$ .
- (c) Montrer que  $\{u^3, v^3\}$  est l'ensemble des solutions de l'équation  $(E'_2) : Z^2 + (1-i)Z - i = 0$ , d'inconnue  $Z \in \mathbb{C}$ .
- (d) Résoudre l'équation  $(E'_2)$ .
- (e) En déduire les valeurs possibles de  $u$ , puis justifier qu'il n'y a que 6 valeurs possibles de  $(u, v)$ , que l'on déterminera.

4. Terminer la résolution de  $(E_2)$ .

*Cette méthode, dont les fondements remontent à CARDAN (1501 - 1576) se généralise en une méthode pour résoudre toutes les équations du type  $z^3 + pz + q = 0$ .*

*Comme de plus un changement de variable simple permet de ramener toute équation polynomiale de degré 3 à une équation de cette forme, on en déduit une méthode permettant la résolution de toutes les équations de degré 3.*

### Partie III. Utilisation d'un changement de variable

Dans cette partie,  $\alpha$  est un réel fixé, avec  $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ .

On s'intéresse à l'équation  $(E_3) : (1+iz)^3(1-i\tan(\alpha)) = (1-iz)^3(1+i\tan(\alpha))$ , d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$ .

5. Montrer que si  $z$  est solution de  $(E_3)$ , alors  $|1+iz| = |1-iz|$ . En déduire que  $z \in \mathbb{R}$ .
6. Mettre  $\frac{1+i\tan(\alpha)}{1-i\tan(\alpha)}$  sous forme exponentielle.
7. Soit  $\theta \in ]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ . Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\tan(\theta)$  soit solution de  $(E_3)$ .
8. En déduire l'ensemble des solutions de  $(E_3)$ .