DM 6

A rendre le 21/11/25

Nous avons déjà mentionné en cours le grand théorème de Fermat, prouvé par Andrew WILES en 1995 et qui stipule que si $n \geq 3$, alors il n'existe pas de triplet $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que :

$$x^n + y^n = z^n.$$

En revanche si $n = 2$, il existe de tels triplets, le plus célèbre d'entre eux étant probablement $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Le but de cet exercice est de déterminer tous les triplets $(x, y, z) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x^2 + y^2 = z^2$.

Un tel triplet est appelé *triplet pythagoricien*. On parlera de *triplet pythagoricien primitif* si de plus $x \wedge y \wedge z = 1$.

1. **Un lemme utile :** soient a et b deux entiers non nuls. Montrer que si a^2 divise b^2, alors a divise b.

   On pourra par exemple montrer que $a \wedge b = a$.

2. Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien, et soit $d = x \wedge y \wedge z$. On pose alors $x' = \dfrac{x}{d}, y' = \dfrac{y}{d}$ et $z' = \dfrac{z}{d}$. Justifier que (x', y', z') est un triplet pythagoricien primitif, et que x', y', z' sont deux à deux premiers entre eux.

3. Soit (x, y, z) un triplet pythagoricien primitif.

   (a) Prouver que x et y ne sont pas tous deux pairs.
   À l'aide de congruences modulo 4, justifier que x et y ne sont pas tous deux impairs.

   Dans la suite, quitte à échanger x et y, on suppose que x est pair et y est impair.

   (b) Justifier qu'il existe $(u, v, w) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tels que $x = 2u$, $z + y = 2v$ et $z - y = 2w$.

   (c) Montrer que $v \wedge w = 1$.

   (d) Prouver que vw est un carré. En déduire que v et w sont des carrés.
   On pose alors $v = n^2$ et $w = m^2$, avec $(m, n) \in (\mathbb{N}^*)^2$.

   (e) Montrer que $n > m$ et que n et m sont premiers entre eux.

4. Montrer que (x, y, z) est un triplet pythagoricien primitif si, et seulement si, il existe deux entiers n et m premiers entre eux, de parités distinctes, avec $n > m > 0$ tels que :

$$\begin{cases} x = 2nm \\ y = n^2 - m^2 \\ z = n^2 + m^2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = n^2 - m^2 \\ y = 2nm \\ z = n^2 + m^2 \end{cases}.$$

   En déduire tous les triplets pythagoriciens.