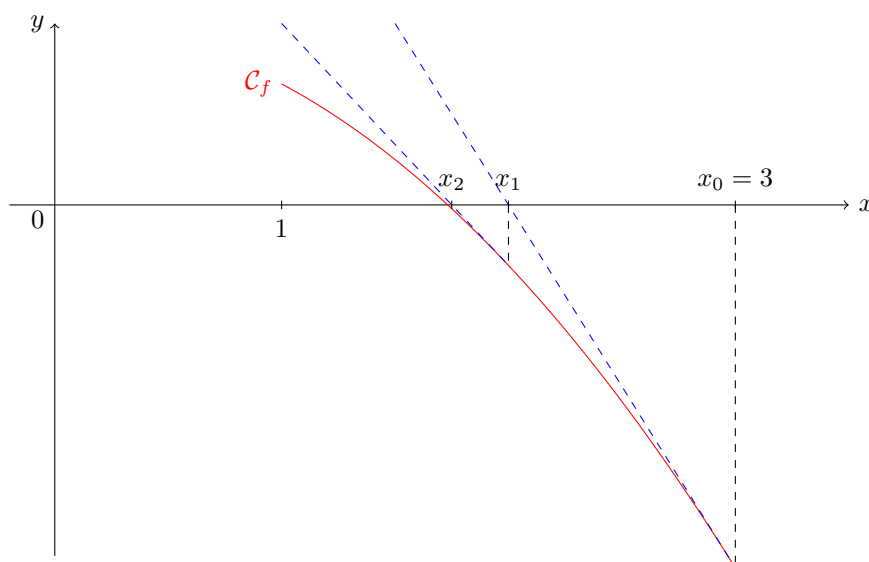


A rendre le 06/02/26

Exercice 1 (Méthode de Newton)

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

- On sait que f est continue sur $[a, b]$ et $0 \in]f(b), f(a)[$. Ainsi, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe (au moins) une solution à l'équation $f(x) = 0$ dans $]a, b[$. De plus, f' est strictement négative donc f est strictement monotone donc f est injective et l'équation $f(x) = 0$ ne peut avoir plus d'une solution. Finalement, l'équation $f(x) = 0$ possède une unique solution dans $]a, b[$ que l'on note α .
- L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $(x_0, f(x_0))$ est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$. Ainsi, l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe abscisse et de cette tangente vérifie l'équation : $0 = f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0)$. D'où $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$ car $f'(x_0)$ est non nul.
- Exemple.**



Partie II. Étude de la fonction g .

- f et f' sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ car f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$. Ainsi, g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ en tant que différence et quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) = 1 - \frac{f'(x)^2 - f(x)f''(x)}{f'(x)^2} = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.
On obtient ainsi, $g(\alpha) = \alpha - \frac{f(\alpha)}{f'(\alpha)} = \alpha$ et $g'(\alpha) = \frac{f(\alpha)f''(\alpha)}{f'(\alpha)^2} = 0$.
- (a) $|f|$ et $|f''|$ sont continue sur le segment $[a, b]$ en tant que composée de fonctions continues (f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a, b]$ et la valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$). Ainsi, elles sont bornées et atteignent leur bornes.
Ainsi, il existe $(c, d) \in [a, b]^2$ tel que pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(c)| < |f'(x)|$ et $|f''(x)| \leq |f''(d)|$. Comme, f' est strictement négative sur $[a, b]$, on a $|f'(c)| > 0$. Posons $m = |f'(c)|$, on a bien $m \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a, b]$, $|f'(x)| \geq m$.
Posons $M = 1 + |f''(d)|$, on a $M \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in [a, b]$, $|f''(x)| \leq M$.

(b) On sait que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$. Ainsi, f' est continue sur le segment $[a, b]$ donc est bornée et atteint ses bornes. Ainsi, il existe $\beta \in [a, b]$ tel que pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leq |f'(\beta)|$. Posons $L = |f'(\beta)|$. On a $M = |f'(\beta)| > 0$ et pour tout $t \in [a, b]$, $|f'(t)| \leq M$. D'après l'inégalité des accroissements finis, on en déduit que f est L lipschitzienne sur $[a, b]$. Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t) - f(\alpha)| \leq L|t - \alpha|$ ($\alpha \in [a, b]$). Or, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq L|t - \alpha|$.

(c) Soit $x \in [a, b]$. D'après la question 1., on sait que pour tout $t \in [a, b]$, $g'(t) = \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2}$.

Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, $|g'(t)| = \left| \frac{f(t)f''(t)}{f'(t)^2} \right| \leq \frac{|f(t)||f''(t)|}{|f'(t)|}$. Or, on sait que pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leq L|t - \alpha|$, $\frac{1}{|f'(t)|^2} \leq \frac{1}{m^2}$ et $|f''(t)| \leq M$, d'après les questions précédentes.

Ainsi, pour tout $t \in [a, b]$, $|g'(t)| \leq \frac{ML}{m^2}|t - \alpha|$.

1er cas : si $x < \alpha$

Alors, pour tout $t \in [x, \alpha]$, on a $|t - \alpha| \leq |x - \alpha|$ d'où pour tout $t \in [x, \alpha]$, $|g'(t)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|$. D'après l'inégalité des accroissements finis appliquée à g sur $[x, \alpha]$, on obtient : $|g(x) - g(\alpha)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha| \times (\alpha - x)$. Or, $g(\alpha) = \alpha$ donc l'inégalité se réécrit :

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2$$

2ème cas : si $x > \alpha$

On procède de même, on obtient pour tout $t \in [\alpha, x]$, $|g'(t)| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|$ puis

$$|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2$$

L'inégalité est également vraie pour $x = \alpha$.

On a donc bien prouvé que : $|g(x) - \alpha| \leq \frac{ML}{m^2}|x - \alpha|^2$.

(d) En posant $K = \frac{ML}{m^2} > 0$. On a d'après la question précédente que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$ ce que l'on souhaitait prouver.

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

1. (a) g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ et pour tout $x \in [a, b]$, $g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2}$.

De plus, f' est strictement négative. Ainsi, f est strictement décroissante sur $[a, b]$. De plus, $f(\alpha) = 0$. Ainsi, pour tout $x \in [a, \alpha]$, $f(x) > 0$ et pour tout $x \in]\alpha, b]$, $f(x) < 0$. Comme on suppose ici que f'' est strictement positive, on obtient que $g'(x) > 0$ pour tout $x \in [a, \alpha]$ et $g'(x) < 0$ pour tout $x \in]\alpha, b]$. Ainsi, g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$ et strictement décroissante sur $[\alpha, b]$.

(b) **Rédaction 1 :**

On sait que g est continue et strictement croissante sur $[a, \alpha]$. Ainsi, $g([a, \alpha]) = [g(a), g(\alpha)] = [g(a), \alpha]$. Or, $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ et $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$. Ainsi, $\frac{f(a)}{f'(a)} < 0$ d'où $g(a) > a$. Ainsi, $g([a, \alpha]) \subset [a, \alpha]$.

On peut donc conclure que $[a, \alpha]$ est stable par g et $x_0 \in [a, \alpha]$. Ainsi, (x_n) est bien définie et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in [a, \alpha]$.

Rédaction 2 :

Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et que $x_n \in [a, \alpha]$.

La propriété est vraie par hypothèse pour $n = 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que x_n existe et que $x_n \in [a, \alpha]$. Alors, $[a, \alpha] \subset [a, b]$ sur lequel g est définie. Ainsi, $g(x_n)$ donc x_{n+1} existe. $a \leq x_n \leq \alpha$ et g croissante sur $[a, \alpha]$ donc $g(a) \leq x_{n+1} \leq g(\alpha)$. Or, $g(a) = a - \frac{f(a)}{f'(a)}$ et $f(a) > 0$, $f'(a) < 0$. Ainsi, $\frac{f(a)}{f'(a)} < 0$ d'où $g(a) > a$ et on a aussi que $g(\alpha) = \alpha$. Ainsi, $a \leq x_{n+1} \leq \alpha$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini et $x_n \in [a, \alpha]$.

Montrons finalement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq x_{n+1}$.

Pour $n = 0$: on sait que $x_1 = g(a) > a$. Ainsi, $x_1 > x_0$. La propriété est donc vérifiée.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n < x_{n+1}$.

Comme $(x_n, x_{n+1}) \in [a, \alpha]^2$ et que g est strictement croissante sur $[a, \alpha]$, on en déduit que $g(x_n) < g(x_{n+1})$ d'où $x_{n+1} < x_{n+2}$.

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

On a donc montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n < x_{n+1}$.

Ainsi, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (strictement) croissante.

- (c) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α donc converge d'après le théorème de la limite monotone. Notons l sa limite. On a $l \in [a, \alpha]$ (passage à la limite dans les inégalités). Or, g est continue sur $[a, \alpha]$. Ainsi, l est un point fixe de g appartenant à $[a, \alpha]$. Or,

$$\begin{aligned} g(l) = l &\iff l - \frac{f(l)}{f'(l)} = l \\ &\iff f(l) = 0 \end{aligned}$$

D'après la question 1, l'équation $f(x) = x$ admet un unique point fixe dans $]a, b[$ qui est α et $f(a) < 0$. Ainsi, $l = \alpha$.

2. Cas général.

- (a) On sait que $\alpha \in]a, b[$. Ainsi, il existe $\eta > 0$ tel que $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$. En posant, $h = \min(\eta, \frac{1}{K+1})$, on aura : $h > 0$, $[\alpha - \eta, \alpha + \eta] \subset [a, b]$ et $h \leq \frac{1}{K+1} < \frac{1}{K}$.

- (b) D'après la question II.2, on sait que pour tout $x \in [a, b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$. Ainsi, pour tout $x \in I$, on a $x \in [a, b]$ donc $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$. De plus, pour tout $x \in I$, $|x - \alpha| \leq h$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $|g(x) - \alpha| \leq Kh \times h$. Or, $Kh < 1$. Ainsi, pour tout $x \in I$, $|g(x) - \alpha| < h$ donc $g(x) \in]\alpha - h, \alpha + h[\subset I$.

On a donc montré que I est stable par g . Si de plus, $x_0 \in I$, on peut en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n existe et $x_n \in I$.

- (c) Montrons que par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$.

Pour $n = 0$: $\frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^0} = \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|) = |x_0 - \alpha|$. Ainsi, la propriété est vraie.

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$.

On sait alors que $x_{n+1} \in I \subset [a, b]$. Ainsi, d'après la question II.2, on a :

$$\begin{aligned} |x_{n+1} - \alpha| &= |g(x_n) - g(\alpha)| \leq K|x_n - \alpha|^2 \\ &\leq_{HR} K \left[\frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n} \right]^2 \\ &\leq K \times \frac{1}{K^2} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n \times 2} \\ &\leq \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^{n+1}} \end{aligned}$$

Ainsi, la propriété est vraie au rang $n + 1$.

On a donc bien prouvé par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K} (K|x_0 - \alpha|)^{2^n}$.

- (d) Par hypothèse, on sait que $x_0 \in I$. Ainsi, $|x_0 - \alpha| \leq h$ et $K|x_0 - \alpha| \leq Kh$. On obtient ainsi que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K}(Kh)^{2^n}$$

Or, $0 < Kh < 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (Kh)^{2^n} = \lim_{N \rightarrow +\infty} (Kh)^N = 0$. Ainsi, par majoration, on obtient que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers α .

3. Exemple.

- (a) $f(x) = 3 - x^2$. Ainsi, f est bien $\mathcal{C}^2$ sur $[1, 3]$, $f(1) = 2 > 0$, $f(3) = -6 < 0$ et pour tout $x \in [1, 3]$, $f'(x) = -2x < 0$. On est bien dans le cadre d'application de nos résultats précédents.

De plus, pour $x \in [1, 3]$, $f(x) = 0 \iff x = \sqrt{3}$. Ainsi, ici $\alpha = \sqrt{3}$. Or, pour tout $x \in [1, 3]$, $|f'(x)| = 2x \in [2, 6]$. Ainsi, $m = 2$ et $L = 6$ conviennent.

De plus, pour tout $x \in [1, 3]$, $|f''(x)| = 2$. Ainsi, $M = 2$ convient.

On peut donc poser $K = \frac{ML}{m^2} = \frac{2 \times 6}{2^2} = 3$.

On remarque que $1.7^2 = 2.89$ et $2^2 = 4$. Ainsi, $1.7^2 < 3 < 4$. Comme la racine carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on obtient : $1.7 < \sqrt{3} < 2$.

Posons $\delta = 0.3$. On a $K\delta = 3 \times 0.3 = 0.9 < 1$. De plus,

$$\begin{aligned} 1 &\leq \sqrt{3} - 0.3 \leq \sqrt{3} + 0.3 \leq 3 \\ \iff 1 + 0.3 &< \sqrt{3} < 3 - 0.3 \\ \iff 1.3 &< \sqrt{3} < 2.7 \end{aligned}$$

Or, $1.3 < 1.7 < \sqrt{3} < 2 < 2.7$. Ainsi, par équivalence, on a : $1 \leq \sqrt{3} - 0.3 \leq \sqrt{3} + 0.3 \leq 3$ d'où $[\sqrt{3} - \delta, \sqrt{3} + \delta] \subset [1, 3]$.

Ainsi, δ vérifie bien les conditions de la question III.2.(a) On peut donc choisir $h = \delta = 0.3$.

- (b) On a :

$$\sqrt{3} - 0.3 \leq 2 \leq \sqrt{3} + 0.3 \iff 1.7 \leq \sqrt{3} \leq 2.3$$

Or, on a prouvé à la question précédente que $1.7 < \sqrt{3} < 2$. Ainsi, on a bien $1.7 \leq \sqrt{3} \leq 2.3$ donc par équivalence, $2 \in [\sqrt{3} - h, \sqrt{3} + h]$.

Ainsi, d'après la question III.2.b, on peut conclure que pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien défini.

- (c) En utilisant la question III.2.c, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3} \left(3 \times |2 - \sqrt{3}| \right)^{2^n}$$

Or, $2 \in [\sqrt{3} - h, \sqrt{3} + h]$, ainsi, $|2 - \sqrt{3}| \leq h = 0.3$.

On obtient donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3} \left(3 \times 0.3 \right)^{2^n} = \frac{1}{3} (0.9)^{2^n}$.

- (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3} (0.9)^{2^n}$.

- (e) Afin d'obtenir une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer x_{N_1} avec $N_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{3} (0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (0.9)^{2^{N_1}} \leq 10^{-100} &\iff (0.9)^{2^{N_1}} \leq 3 \times 10^{-100} \iff 2^{N_1} \ln(0.9) \leq \ln(3 \times 10^{-100}) \\ &\iff 2^{N_1} \geq \frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \\ &\iff N_1 \ln(2) \geq \ln \left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \right) \\ &\iff N_1 \geq \frac{\ln \left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)} \right)}{\ln(2)} \end{aligned}$$

$$\text{On pose } N_1 = \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{\ln(3 \times 10^{-100})}{\ln(0.9)}\right)}{\ln(2)} \right\rfloor + 1.$$

En effectuant $N_1 = 12$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près.

- (f) Si l'on effectue la méthode de dichotomie sur le segment $[1, 3]$, on crée deux suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers $\sqrt{3}$. De plus, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - \sqrt{3}| \leq \frac{3-1}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}$. Afin de calculer une valeur approchée de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près, il suffit de calculer a_{N_2} avec $N_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100}$. Or,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{N_2-1}} \leq 10^{-100} &\iff -(N_2 - 1) \ln(2) \leq -100 \ln(10) \\ &\iff (N_2 - 1) \geq \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} \\ &\iff N_2 \geq \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} + 1 \end{aligned}$$

$$\text{On pose } N_2 = \left\lfloor \frac{100 \ln(10)}{\ln(2)} + 1 \right\rfloor + 1.$$

En effectuant $N_2 = 334$ itérations, on aura bien une approximation de $\sqrt{3}$ à 10^{-100} près. La méthode de Newton semble donc être la plus efficace.
