DM 9

A rendre le 06/02/26

Exercice 1 (Méthode de Newton)

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$.
On suppose en outre que :

- $f(a) > 0$ et $f(b) < 0$;
- f' est strictement négative sur $[a,b]$.

Partie I. Principe de la méthode de Newton.

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]a,b[$, que l'on notera α.

Le but de ce problème est de présenter une méthode pour obtenir une valeur approchée de α. Cette méthode consiste, à partir d'une première approximation x_0 de α, à ¡¡ linéariser ¿¿ l'équation $f(x) = 0$ au voisinage de x_0, donc à remplacer f par sa tangente en x_0.

2. Soit $x_0 \in [a,b]$. Déterminer l'abscisse du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en $(x_0, f(x_0))$.

On introduit alors la fonction $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in [a,b],\ g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

On obtient ainsi une nouvelle approximation de α en prenant $x_1 = g(x_0)$. En poursuivant, on est ainsi conduit à étudier l'existence, puis la convergence vers α, de la suite (x_n) définie par la relation $x_{n+1} = g(x_n)$.

3. **Exemple.** Dans cette question, on cherche une approximation de $\sqrt{3}$. Pour cela, on considère la fonction $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - x^2$.
   (a) Tracer la courbe représentative de f.
   (b) Prenons $x_0 = 2$ ($\approx \sqrt{3}$). Construire graphiquement les trois premiers termes de la suite (x_n).

Partie II. Étude de la fonction g.

1. Montrer que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, et calculer sa dérivée. Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$.
2. On souhaite prouver qu'il existe $K > 0$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|g(x) - \alpha| \leq K|x - \alpha|^2$.
   (a) Justifier l'existence d'un couple (m, M) de réels **strictement** positifs tels que :
   $$\forall x \in [a,b], \quad |f'(x)| \geq m \ \text{ et } \ |f''(x)| \leq M.$$
   (b) Montrer qu'il existe $L > 0$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, $|f(t)| \leq L|t - \alpha|$.
   (c) Soit $x \in [a,b]$. En utilisant le théorème des accroissements finis sur $[x, \alpha]$ (ou $[\alpha, x]$), justifier que :
   $$|g(x) - \alpha| \leq \frac{M}{m^2} L|x - \alpha|^2.$$
   (d) Conclure.

Partie III. Étude de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit (x_n) la suite récurrente définie par $\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ \forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n) \end{cases}$.

1. Dans cette question uniquement, on suppose de plus que $f'' > 0$ sur $[a,b]$ et $x_0 = a$.
   (a) Étudier les variations de g.
   (b) Justifier que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, croissante et majorée par α.
   (c) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
2. On revient au cas général.
   (a) Justifier qu'il existe $h > 0$ tel que en notant $I = [\alpha - h, \alpha + h]$, on ait $Kh < 1$ et $I \subset [a,b]$.
   (b) Montrer que I est un intervalle stable par g. En déduire que si $x_0 \in I$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, x_n est bien définie et $x_n \in I$.

   On suppose dans toute la suite du problème que $x_0 \in I$.

   (c) Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ |x_n - \alpha| \leq \frac{1}{K}\Big(K(x_0 - \alpha)\Big)^{2^n}.$$
   (d) En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
3. **Exemple.** Reprenons l'approximation de $\sqrt{3}$. On considère toujours la fonction $f : [1,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3 - x^2$.
   (a) Montrer que l'on peut prendre $K = 3$ et $h = 0,3$ (on pourra remarquer que $1,7 < \sqrt{3} < 2$).
   (b) En déduire que la suite (x_n) définie par $x_0 = 2$ et $x_{n+1} = g(x_n)$ est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $|x_n - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3}\Big(0,9\Big)^{2^n}$.
   (d) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ avec cette méthode ?
   (e) Combien d'itérations doit-on faire pour obtenir 100 décimales de $\sqrt{3}$ par méthode de dichotomie ? Quelle est la méthode la plus efficace ?