DS 1

Devoir surveillé du Samedi 20 Septembre

Durée : 3h.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements interviendront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les étudiants bénéficiant d'un tiers-temps ne traiteront pas l'exercice 2.

La calculatrice n'est pas autorisée.

Exercice 1

Les questions 1 à 6 de cet exercice sont indépendantes.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation et l'inéquation suivantes :
$$|x+1| = 4 - |3x-2| \quad \text{et} \quad \frac{(x-1)^2}{8x} \leq \frac{x+1}{2} - \sqrt{x}.$$
2. Montrer les inégalités suivantes :
$$\forall x, y \geq 0, \quad 1 + \sqrt{xy} \leq \sqrt{1+x}\sqrt{1+y},$$
$$\forall x, y \in [0,1], \quad x^2 + y^2 - xy \leq 1.$$
3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$, $u_1 = 11$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad u_n = 3u_{n-1} + 4u_{n-2}.$$
   Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad u_n = (-1)^n + 3 \cdot 4^n$.
4. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $[-1,1]$. Montrer qu'il existe une unique fonction g continue sur $[-1,1]$ telle que $\displaystyle\int_{-1}^{1} g(t)\,\mathrm{d}t = 0$ et une unique fonction $h : [-1,1] \to \mathbb{R}$ constante telles que $f = g + h$.
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\left\lfloor \sqrt{n^2+3n+3} \right\rfloor$.
6. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor - \lfloor x \rfloor$.
   (a) Justifier que : $\forall x \in [0,1[, f(x) = 0$.
   (b) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x+1) = f(x)$.
   (c) En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+1}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{x+2}{3} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 2

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant la relation $(\bigstar)$ suivante :
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) + f(y)| = |x+y|. \qquad (\bigstar)$$

1. On note :
$$f_1 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x. \end{array} \right. \quad \text{et} \quad f_2 : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -x. \end{array} \right. .$$
   Montrer que f_1 et f_2 satisfont $(\bigstar)$.

2. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On considère les deux assertions (P_1) et (P_2) suivantes :

$$\begin{array}{ll} (P_1): & (\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x) \\ (P_2): & (\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x \textbf{ ou } f(x) = -x) \end{array}$$

   Justifier soigneusement que l'une de ces assertions est vraie et que l'autre est fausse.

3. Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $(\bigstar)$.
   (a) Montrer que $f(0) = 0$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| = |x|$.
   (c) À l'aide d'un raisonnement par l'absurde, prouver que :

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x) \textbf{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -x).$$

4. Déterminer toutes les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ satisfaisant $(\bigstar)$.

Exercice 3 (Étude d'une suite)

On rappelle que pour tout réel α et pour tout $x > 0$, on note $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

On se propose de déterminer la limite de la suite $u_n = \dfrac{(n!)^{\frac{1}{n}}}{n}$.

1. (a) Montrer que pour tout $x > -1$: $\quad \ln(1+x) \leq x$.
   (b) Montrer que pour tout $x \geq 0$: $\quad x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

2. On note $v_k = \dfrac{k^k}{k!}$.
   (a) Simplifier $\dfrac{v_{k+1}}{v_k}$.
   (b) À l'aide de la question 1., montrer que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad 1 - \frac{1}{2k} \leq \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq 1.$$

3. (a) Vérifier que que pour tout $k \geq 2$: $\quad \ln\left(\dfrac{k-1}{k}\right) \leq \dfrac{-1}{k}$.
   (b) En déduire que pour tout $k \geq 2$:

$$1 + \frac{\ln(k-1) - \ln(k)}{2} \leq \ln\left(\frac{v_{k+1}}{v_k}\right) \leq 1.$$

4. Déduire de la question précédente un encadrement de $\ln(v_n)$.
5. En déduire que (u_n) converge vers e^{-1}.

Exercice 4 (Une limite avec des coefficients binomiaux)

L'objectif de ce problème est de montrer que :

$$\lim_{n \mapsto +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}} = 2.$$

Partie A : Préliminaires.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Justifier que :
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \binom{n}{k} = \frac{n-k+1}{k}\binom{n}{k-1}.$$

2. En déduire que pour tout entier k vérifiant $1 \leq k \leq \frac{n}{2}$:
$$\binom{n}{k-1} < \binom{n}{k},$$
et pour tout entier k vérifiant $\frac{n}{2} \leq k \leq n-1$:
$$\binom{n}{k+1} < \binom{n}{k}.$$

3. Qu'en déduit-on sur la suite $\left(\binom{n}{k}\right)_{k \in [\![1, n-1]\!]}$?

Partie B : Encadrement et limite.

On note pour entier naturel n :
$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{\binom{n}{k}}.$$

Dans toute la suite, on considère $n \geq 4$.

4. Montrer que $S_n \geq 2$.

5. Montrer que pour tout entier k entre 2 et $n-2$:
$$\binom{n}{2} \leq \binom{n}{k}.$$

6. En déduire que :
$$\sum_{k=2}^{n-2} \frac{1}{\binom{n}{k}} \leq 2\frac{n-3}{n(n-1)}.$$

7. En déduire un encadrement de S_n puis sa limite.

Exercice 5 (Exercice hors barême)

Cet exercice plus difficile n'est à aborder que si vous avez très bien traité tout le reste du sujet.
Prouver que :
$$\forall p \in \mathbb{N}^*, \ \forall a_1, \dots, a_p \in \mathbf{R}_+, \quad a_1 a_2 \cdots a_p = 1 \Rightarrow a_1 + a_2 + \cdots + a_p \geq p.$$
