

Devoir surveillé du Samedi 15 Novembre

Exercice 1

1. Pour (\mathcal{S}_1) :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_1) &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ x + y + 2z = 0 \\ x + y + 2t = m \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ z - t = -1 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ -z + t = m - 1 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - L_1) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ z - t = -1 \\ 0 = m - 2 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

La troisième équation est une équation de compatibilité.

- Si $m \neq 2$: le système est incompatible, il n'y a pas de solution.
- Si $m = 2$: on poursuit la résolution en simplifiant l'équation de compatibilité et en considérant les inconnues x et z comme principales (et donc y et t comme paramètres).

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} x + y + z + t = 1 \\ z - t = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + 2t = 2 \quad (L_1 \leftarrow L_1 - L_2) \\ z - t = -1 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - y - 2t \\ z = -1 + t \end{cases}
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est alors :

$$\{(2 - y - 2t, y, -1 + t, t), (y, t) \in \mathbb{R}^2\}.$$

2. Pour (\mathcal{S}_2) :

$$\begin{aligned}
 (\mathcal{S}_2) &\Leftrightarrow \begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = m^2 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \\ x + my + z = m \\ mx + y + z = 1 \quad (L_1 \leftrightarrow L_3) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 \quad (L_2 \leftarrow L_2 - L_1) \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 1 - m^2 \quad (L_3 \leftarrow L_3 - mL_1) \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = m^2 \\ (m-1)y + (1-m)z = m - m^2 \\ (1-m)(2+m)z = (1-m)(m+1)^2 \quad (L_3 \leftarrow L_3 + L_2) \end{cases}
 \end{aligned}$$

Il y a trois cas :

- si $m \neq 1$ et $m \neq -2$: Le système présente un unique triplet (x, y, z) solution à savoir

$$\left(-\frac{m+1}{m+2}, \frac{1}{m+2}, \frac{(m+1)^2}{m+2}\right).$$

- si $m = 1$: le système se résume à l'équation $x + y + z = 1$ et, en considérant x comme inconnue principale, l'ensemble des solutions est :

$$\{(1 - y - z, y, z), y, z \in \mathbb{R}\}.$$

- si $m = -2$: La dernière équation du système se récrit $0 = 3$. Le système n'a pas de solutions.

Exercice 2

- Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = x^{\frac{x}{x+1}} = \exp\left(\frac{x}{x+1} \ln(x)\right).$$

Par composition et produit de fonctions dérivables, f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* . Et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x}{x+1} \cdot \frac{1}{x} + \frac{x+1-x}{(x+1)^2} \ln(x) \right) \exp\left(\frac{x}{x+1} \ln(x)\right) \\ &= \frac{f(x)}{(x+1)^2} (x+1 + \ln(x)) = \frac{f(x)}{(x+1)^2} g(x). \end{aligned}$$

Et donc (puisque $f(x) \neq 0$) :
$$\boxed{\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}}.$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $(x+1)^2 > 0$ et $f(x) > 0$, $f'(x)$ est bien du signe de $g(x)$.

- La fonction g est strictement croissante et continue sur \mathbb{R}_+^* car somme des fonctions \ln et $x \mapsto x+1$ qui le sont. Par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$. Donc g réalise une bijection de \mathbb{R}_+^* sur \mathbb{R} . Par conséquent, $\boxed{\text{il existe un unique } \alpha \in \mathbb{R}_+^* \text{ tel que } g(\alpha) = 0.}$

Par ailleurs, $g(1) = 2 > 0 = g(\alpha)$, et donc par croissance de g , $1 > \alpha$, si bien que $\boxed{\alpha \in]0, 1[}$.

- On déduit de ce qui précède le tableau de variation suivant :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$			$f(\alpha)$		$+\infty$

- Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0$. Puisque $x+1 \xrightarrow[x \rightarrow 0]{} 1$, alors par quotient $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)}{x+1} = 0$.
- Par composition, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right) = 1$ (par continuité de \exp en 1).

Ainsi, $\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en } 0.}$ Posons alors :

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} f(x) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

Alors \tilde{f} est continue en 0, et puisque f était continue (car dérivable) sur \mathbb{R}_+^* et que f et \tilde{f} coïncident sur \mathbb{R}_+^* , alors \tilde{f} est continue sur \mathbb{R}_+^* . Ainsi, $\boxed{\tilde{f} \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+ \text{ tout entier.}}$

5. Pour $u \neq 0$:

$$\frac{e^u - 1}{u} = \frac{e^u - e^0}{u - 0} \xrightarrow[u \rightarrow 0]{} \exp'(0) = 1.$$

Donc pour $x \in]0, 1[$:

$$\frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = \frac{f(x) - 1}{x} = \frac{\exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right) - 1}{x} = \frac{\exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right) - 1}{\frac{x \ln(x)}{x+1}} \ln(x).$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x \ln(x)}{x+1} = 0$ et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, alors $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right) - 1}{\frac{x \ln(x)}{x+1}} = 1$.

Et par ailleurs, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x+1} = -\infty$.

Par produit, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tilde{f}(x) - \tilde{f}(0)}{x} = -\infty$ et $\boxed{\tilde{f} \text{ n'est pas dérivable en } 0}$.

6. Pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\frac{x \ln(x)}{x+1} - \frac{(x+1) \ln(x)}{x+1}\right) = \exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right).$$

Mais $\frac{\ln(x)}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \frac{x}{x+1} = \frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1+1/x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées. Donc, par continuité de l'exponentielle en 0, $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1}$.

7. Il s'agit de déterminer si $f(x) - x$ possède ou non une limite finie en $+\infty$. Pour $x > 0$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= x^{\frac{x}{x+1}} - x = x \left(x^{-\frac{1}{x+1}} - 1 \right) \\ &= x \left(\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right) - 1 \right) \\ &= -\frac{x \ln(x)}{x+1} \frac{\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right) - 1}{-\frac{\ln(x)}{x+1}} \end{aligned}$$

Puisque $-\frac{\ln(x)}{x+1} = -\frac{\ln(x)}{x} \frac{1}{1+1/x} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 0$ par croissances comparées et $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$, alors :

$$\frac{\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x+1}\right) - 1}{-\frac{\ln(x)}{x+1}} \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} 1.$$

Par ailleurs, $-\frac{x \ln(x)}{x+1} = \frac{1}{1+1/x} \ln(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} +\infty$. Par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = -\infty.$$

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ ne possède pas d'asymptote au voisinage de } +\infty}$.

Exercice 3

1. (a) L'expression $f(x)$ est définie si, et seulement si, $\frac{1 + \sin(x)}{2} \geq 0$ et $\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \in [-1, 1] = \mathcal{D}_{\arccos}$. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\sin(x) \geq -1 \quad \text{et donc} \quad \frac{1 + \sin(x)}{2} \geq 0.$$

D'autre part :

$$0 \leq \frac{1 + \sin(x)}{2} \leq \frac{1 + 1}{2} = 1 \quad \text{d'où} \quad \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \in [0, 1] \subset [-1, 1].$$

Ainsi, l'ensemble de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- (b) Pour tout $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $x + 2\pi \in \mathcal{D}_f$ et $x - 2\pi \in \mathcal{D}_f$, et :

$$f(x + 2\pi) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x + 2\pi)}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\right) = f(x).$$

Donc f est 2π -périodique.

- (c) Soit $x \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Alors $\pi - x$ appartient à \mathcal{D}_f et :

$$f(\pi - x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(\pi - x)}{2}}\right) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}}\right) [= f(x)].$$

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$(x, y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = f(x) \Leftrightarrow y = f(\pi - x) \Leftrightarrow (\pi - x, y) \in \mathcal{C}_f.$$

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, si on note M le point du plan de coordonnées (x, y) et $M'(x', y')$ l'image de M par la symétrie s par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$, alors :

- M et M' ont même ordonnée, soit $y = y'$;
- le milieu du segment $[M, M']$ appartient à la droite $x = \frac{\pi}{2}$, soit $\frac{x + x'}{2} = \frac{\pi}{2}$.

Ainsi, $M' = s(M)$ est de coordonnées $(\pi - x, y)$.

On a donc montré que M appartient à \mathcal{C}_f si, et seulement si, $s(M)$ appartient à \mathcal{C}_f , soit encore $s(\mathcal{C}_f) = \mathcal{C}_f$: \mathcal{C}_f est bien symétrique par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$.

 **À retenir. Courbes présentant un axe de symétrie vertical.**

Plus généralement, pour une fonction f définie sur \mathcal{D} , s'il existe un réel a tel que :

- pour tout $x \in \mathcal{D}$, $a - x \in \mathcal{D}$,
- pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(a - x) = f(x)$,

alors \mathcal{C}_f est symétrique par rapport à la droite d'équation $x = \frac{a}{2}$.

- (d) Si on sait représenter f sur l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, alors par symétrie par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$, on en déduit \mathcal{C}_f sur $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$, et donc sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$. Cet intervalle étant de longueur 2π , on en déduit \mathcal{C}_f sur \mathbb{R} tout entier par (2π) -périodicité, en effectuant des translations de vecteur $2\pi\vec{i}$.

Ainsi, on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

2. (a) Justifions que f est strictement monotone sur I :

- $x \mapsto \frac{1 + \sin(x)}{2}$ est strictement croissante sur $I = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, d'image $[0, 1]$;
- $u \mapsto \sqrt{u}$ est strictement croissante sur $[0, 1]$, d'image $[0, 1]$;
- \arccos est strictement décroissante sur $[0, 1]$, d'image $\arccos([0, 1]) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

Par composition, f est donc strictement décroissante sur I .

D'autre part, f est continue sur I car composée de telles fonctions. Par le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de I sur l'intervalle $J = f(I) = [0, \frac{\pi}{2}]$.

- (b) Soit $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Résolvons l'équation suivante d'inconnue $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$\begin{aligned} y = f(x) &\Leftrightarrow y = \arccos \left(\sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \right) \underset{y \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} \cos(y) = \sqrt{\frac{1 + \sin(x)}{2}} \\ &\Leftrightarrow 2\cos(y)^2 - 1 = \sin(x) \Leftrightarrow \cos(2y) = \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) \\ &\Leftrightarrow 2y \equiv \frac{\pi}{2} - x [2\pi] \text{ ou } 2y \equiv -\left(\frac{\pi}{2} - x\right) [2\pi] \\ &\underset{2y \in [0, \pi]}{\Leftrightarrow} 2y = \frac{\pi}{2} - x \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - 2y \end{aligned}$$

Ainsi, $f^{-1}(y) = \frac{\pi}{2} - 2y$ pour tout $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- (c) Soit $x \in I$. On résout l'équation d'inconnue $y \in J$:

$$x = \frac{\pi}{2} - 2y \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

Ainsi, $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ pour tout $x \in I$.

3. Justifions au préalable que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$:

- $x \mapsto \frac{1 + \sin(x)}{2}$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, à valeurs dans $]0, 1[$;
- $u \mapsto \sqrt{u}$ est dérivable sur $]0, 1[$, à valeurs dans $]0, 1[$;
- \arccos est dérivable sur $]0, 1[$.

Par composition, f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

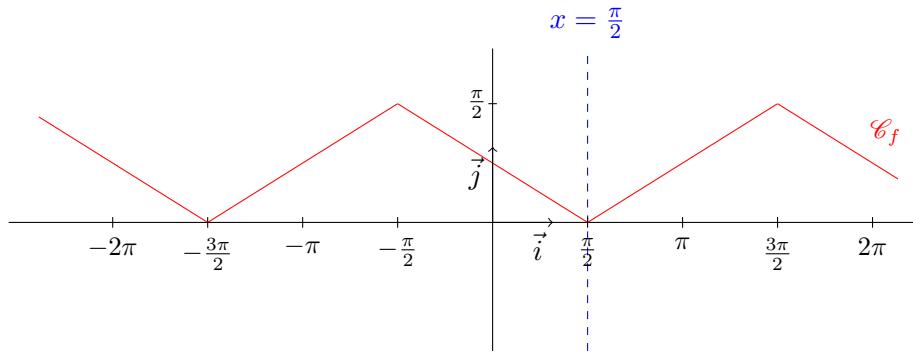
Pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, calculons :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\frac{\cos(x)}{2}}{2\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1+\sin(x)}{2}}} = -\frac{\cos(x)}{4\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\sqrt{\frac{1-\sin(x)}{2}}} \\ &= -\frac{\cos(x)}{2\sqrt{1 - \sin(x)^2}} = -\frac{\cos(x)}{2|\cos(x)|} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

car $\cos \geq 0$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Il existe donc $c \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\mapsto -\frac{x}{2} + c$. Et puisque $f(0) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$, on retrouve bien $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, égalité encore valable pour $x = \pm \frac{\pi}{2}$ puisque $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(1) = 0$ et $f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$.

4. Traçons la courbe de f d'abord sur l'intervalle I , puis effectuons une réflexion par rapport à la droite $x = \frac{\pi}{2}$, puis des translations de vecteur $2\pi\vec{i}$:



5. (a) C'est du cours. Soit $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, et notons $t = \tan(x/2)$. Alors :

$$\cos(x) = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 = \frac{2}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

$$\sin(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2t}{1+t^2}.$$

- (b) Pour $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, en notant encore $t = \tan(x/2)$:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}} &= \sqrt{\frac{1+\frac{2t}{1+t^2}}{2}} = \sqrt{\frac{(1+t)^2}{2(1+t^2)}} = \frac{1+t}{\sqrt{2(1+t^2)}} \quad \text{car } t = \tan(x/2) \geq -1 \\ &= \frac{1+\tan(x/2)}{\sqrt{2(1+\tan(x/2)^2)}} = \frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\cos(x/2)} \sqrt{\frac{\cos(x/2)^2}{2}} \\ &= \frac{\cos(x/2)+\sin(x/2)}{\sqrt{2}} \quad \text{car } \cos(x/2) \geq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $x \in I$:

$$f(x) = \arccos\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right).$$

- (c) Calculons pour tout $x \in I$:

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right).$$

D'où :

$$f(x) = \arccos\left(\cos\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$$

car $\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ appartient à $[0, \pi]$.

Exercice 4

1. La fonction f est définie, continue et dérivable sur \mathbb{R} et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 3x^2 - 12x = 3(x-2)(x+2).$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0
$f(x)$	$-\infty$	↗ 8	↘ -24	↗ $+\infty$

Pour les limites en $\pm\infty$: $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{12}{x^2} - \frac{8}{x^3}\right) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty$.

Ainsi, avec le théorème de la bijection (f étant continue et monotone sur $]-\infty, -2]$, sur $]-2, 2[$ et sur $[2, +\infty[$:

- f réalise une bijection de $]-\infty, -2]$ sur $I_1 =]-\infty, 8]$;
- f réalise une bijection de $]-2, 2[$ sur $I_2 = [-24, 8]$;
- f réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur $I_3 = [-24, +\infty[$.

Comme 0 est un élément de I_1, I_2 et I_3 , il possède un antécédent dans $]-\infty, -2]$, un deuxième dans $]-2, 2[$ et un troisième dans $[2, +\infty[$. L'équation (E) possède donc 3 solutions réelles.

2. (a) Posons $x = u + v$ avec u et v deux complexes tels que $uv = 4$. Alors

$$\begin{aligned} x \text{ solution de (E)} &\Rightarrow x^3 - 12x - 8 = 0 \\ &\Rightarrow (u+v)^3 - 12(u+v) - 8 = 0 \\ &\Rightarrow u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 12(u+v) - 8 = 0 \\ &\Rightarrow u^3 + 12u + 12v + v^3 - 12(u+v) - 8 = 0 \quad (\text{car } uv = 4) \\ &\Rightarrow u^3 + v^3 = 8. \end{aligned}$$

(b) On pose $S = u^3 + v^3 = 8$ et $P = u^3v^3 = (uv)^3 = 4^3 = 64$.

Ainsi (avec le rappel), u^3 et v^3 sont solutions de $X^2 - 8X + 64 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = -3 \times 64$. Les solutions sont donc

$$X_{1,2} = \frac{8 \pm i\sqrt{3 \times 64}}{2} = 4 \pm i4\sqrt{3}.$$

Ainsi, $u^3 = 4 \pm i4\sqrt{3}$ et $v^3 = \overline{u^3}$.

(c) Comme $|u^3| = \sqrt{64} = 8$ et $\frac{u^3}{|u^3|} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\pi/3}$, on obtient $u^3 = 8e^{i\pi/3}$.

En notant $u = re^{i\theta}$, on a :

$$u^3 = 8e^{i\pi/3} \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = 8e^{i\pi/3} \Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 8 \\ 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $u = 2e^{i\pi/9}$ ou $2e^{i7\pi/9}$ ou $2e^{i13\pi/9}$.

(d) On déduit de la relation $uv = 4 \Leftrightarrow v = \frac{4}{u}$, les couples (u, v) possibles :

$$(2e^{i\pi/9}, 2e^{-i\pi/9}), \quad (2e^{i7\pi/9}, 2e^{-i7\pi/9}) \quad \text{et} \quad (2e^{i13\pi/9}, 2e^{-i13\pi/9}).$$

Avec la relation $x = u + v$ et les formules d'Euler, on obtient $x = 4 \cos(\pi/9)$ ou $4 \cos(7\pi/9)$ ou $4 \cos(13\pi/9)$.

Il reste à vérifier que ces trois valeurs sont bien solutions. Dans chaque cas, $uv = 4$ de sorte que

$$(u + v)^3 - 12(u + v) - 8 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 - 12(u + v) - 8 = 0.$$

Donc $x = u + v$ est solution de (E) .

Finalement, l'ensemble des solutions de (E) est

$$S = \{4 \cos(\pi/9), 4 \cos(7\pi/9), 4 \cos(13\pi/9)\}.$$

3. (a) Avec les formules d'Euler et de Moivre,

$$\cos^3(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}(e^{i3\theta} + 3e^{i\theta} + 3e^{-i\theta} + e^{-3i\theta}) = \frac{1}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)).$$

(b) Si $x = a \cos(\theta)$ est solution alors

$$\begin{aligned} a^3 \cos^3(\theta) - 12a \cos(\theta) - 8 &= 0 \Leftrightarrow \frac{a^3}{4}(\cos(3\theta) + 3\cos(\theta)) - 12a \cos(\theta) - 8 = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{a^3}{4} \cos(3\theta) + \left(\frac{3a^3}{4} - 12a\right) \cos(\theta) - 8 = 0. \end{aligned}$$

Cette équation est de la forme voulue si

$$\frac{3a^3}{4} - 12a = 0 \Leftrightarrow 3a \left(\frac{a}{2} - 2\right) \left(\frac{a}{2} + 2\right) = 0 \Leftrightarrow a = 0 \text{ ou } a = 4 \text{ ou } a = -4.$$

En prenant $a = 4$ par exemple, l'équation devient :

$$\frac{4^3}{4} \cos(3\theta) - 8 = 0 \Leftrightarrow \cos(3\theta) = \frac{1}{2}.$$

(c) On résout l'équation obtenue à la question précédente :

$$\cos(3\theta) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 3\theta = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } 3\theta = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}.$$

On a a priori 6 solutions mais comme $\cos(\pi/9) = \cos(-\pi/9)$, $\cos(7\pi/9) = \cos(-7\pi/9)$ et $\cos(13\pi/9) = \cos(-13\pi/9)$, cela redonne les 3 solutions de la question 2.