DS 2

Devoir surveillé du Samedi 8 Novembre

La calculatrice est interdite. Durée : 3h

Exercice 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les systèmes suivants en discutant selon la valeur du paramètre m :

$$(\mathscr{S}_1) : \left\{\begin{array}{rcl} x+y+z+t & = & 1 \\ x+y+2z & = & 0 \\ x+y+2t & = & m \end{array}\right.$$

$$(\mathscr{S}_2) : \left\{\begin{array}{rcl} mx+y+z & = & 1 \\ x+my+z & = & m \\ x+y+mz & = & m^2 \end{array}\right.$$

Exercice 2

Dans tout l'exercice, on note

$$f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^{\frac{x}{x+1}} \end{array}\right. \quad \text{et} \quad g : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(x)+x+1 \end{array}\right. .$$

On rappelle que, par définition, $x^{\frac{x}{x+1}} = \exp\left(\frac{x\ln(x)}{x+1}\right)$.

1. Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, exprimer $\frac{f'(x)}{f(x)}$ en fonction de $g(x)$. En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
2. Justifier qu'il existe un unique $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $g(\alpha) = 0$, et que ce α est dans $]0,1[$. On ne demande pas de valeur exacte de α.
3. En déduire le tableau de variation de f, sans les limites.
4. Montrer que f est prolongeable en une fonction $\tilde{f} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, continue sur $\mathbb{R}_+$.
5. Justifier que $\displaystyle\lim_{u\to 0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$. En utilisant cette limite, étudier la dérivabilité de $\widetilde{f}$ en 0 .
6. Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
7. La courbe représentative de f possède-t-elle une asymptote en $+\infty$? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.

   Indication : on pourra de nouveau faire apparaître la limite de la question 5.

Exercice 3

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin(x)}{2}}\right).$$

1. (a) Déterminer l'ensemble de définition de f noté $\mathscr{D}_f$.
   (b) Montrer que f est 2π-périodique.
   (c) Calculer $f(\pi - x)$ pour tout $x \in \mathscr{D}_f$. En déduire que la courbe $\mathscr{C}_f$ de f est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \dfrac{\pi}{2}$.
   (d) Justifier qu'on peut réduire le domaine d'étude de f à l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. (a) Sans calcul de dérivée, justifier que f est strictement monotone sur I. En déduire que f réalise une bijection de I sur un intervalle J à préciser.
   (b) Déterminer l'expression de $f^{-1}(y)$ pour $y \in J$.
   (c) En déduire une expression simple de $f(x)$ pour $x \in I$.
3. Retrouver le résultat de la question 2.(c) en calculant la dérivée de f sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ sur un intervalle de longueur 4π contenant I.
5. On se propose de retrouver le résultat de la question 2.(c) par une autre méthode.
   (a) Pour $x \in I$, donner l'expression de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ en fonction de $\tan(x/2)$.
   (b) Montrer que, pour tout $x \in I$:
   $$f(x) = \arccos\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2}}\right).$$
   (c) Conclure.

Exercice 4

On se propose de résoudre l'équation (E) suivante : $x^3 - 12x - 8 = 0$.

1. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - 12x - 8$.
   En déduire le nombre de solutions réelles de l'équation (E).
2. On cherche une solution de (E) sous la forme $x = u + v$, avec u et v complexes.
   (a) Montrer qu'en fixant le produit $uv = 4$, on doit avoir $u^3 + v^3 = 8$.
   (b) En déduire, sous ces hypothèses et en utilisant le rappel ci-dessous, que u^3 et v^3 sont solutions d'une équation du second degré, dont on calculera les racines.
   En déduire que $u^3 = 4 \pm 4i\sqrt{3}$ (l'un ou l'autre) et que $v^3 = \overline{u^3}$.

Rappel : Si deux nombres complexes z_1 et z_2 vérifient $z_1 + z_2 = S$ et $z_1 z_2 = P$ alors ce sont les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

   (c) Dans la suite, on considère que $u^3 = 4 + 4i\sqrt{3}$.
   En écrivant u^3 sous forme trigonométrique, déterminer les valeurs de u possible.
   (d) Déterminer les couples (u, v) correspondants, puis les solutions de l'équation (E).
3. Dans cette question, on applique une autre méthode permettant de retrouver les solutions de l'équation (E).
   (a) Linéariser $\cos^3(\theta)$: plus précisément, exprimer $\cos^3(\theta)$ en fonction de $\cos(\theta)$ et $\cos(3\theta)$.
   (b) On cherche les solutions de (E) sous la forme $x = a\cos(\theta)$ (avec a et θ réels).
   Trouver un réel a positif pour que l'équation (E) se ramène à la résolution de $\cos(3\theta) =$ constante.
   (c) Conclure.
