

Devoir surveillé du Samedi 31 Janvier

Exercice 1 (Une suite récurrente faisant intervenir une homographie)

1. (a) La fonction f est dérivable sur D en tant que quotient de fonctions qui le sont et dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in D$:

$$f'(x) = \frac{2(x-1) - (2x-1)}{(x-1)^2} = \frac{-1}{(x-1)^2}.$$

- (b) Puisque $f'(x) \leq 0$ pour tout $x \in D$, f est décroissante sur chacun des intervalles $] -\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.



Mise en garde.

Le domaine de définition D de f n'étant pas un intervalle, on ne peut conclure que f est décroissante sur D !

De plus, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-1}{x-1} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-1}{x-1} = -\infty$. La courbe de f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

D'autre part, pour tout $x \in D$:

$$f(x) = \frac{2 - \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2.$$

Donc la courbe de f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$ en $+\infty$ et $-\infty$. On en déduit le tableau de variation suivant pour f .

x	$-\infty$	1	$+\infty$
f	2	$+\infty$	2
		↘	↘
		$-\infty$	2

- (c) La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$, décroissante sur cet intervalle, et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Ainsi, $f(]1, +\infty[) =]2, +\infty[$ et est inclus dans $]1, +\infty[$.
- (d) L'intervalle $J =]1, +\infty[$ est stable par f et contient $u_0 = 3$. Montrons par récurrence la propriété suivante pour tout $n \geq 0$:

$\mathcal{P}(n)$: " u_n est bien défini et $u_n \in J$ ".

I Pour $n = 0$, $u_0 = 3$ est bien défini et appartient à J .

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété vraie au rang n .

Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et appartient à J . Puisque J est inclus dans le domaine D de définition de f et que cet intervalle est stable par f , $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien défini et appartient à J . D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, la suite (u_n) est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

- (e) Soit $x \in D$. Résolvons l'équation suivante :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = x \Leftrightarrow 2x-1 = x(x-1) \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Le discriminant de cette équation du second degré est $5 > 0$, et ses deux racines réelles distinctes sont $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$. Remarquons enfin que :

$$\frac{3+\sqrt{5}}{2} \geq \frac{3}{2} > 1 \quad \text{et} \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} = \frac{3^2-5}{2(3+\sqrt{5})} = \frac{2}{3+\sqrt{5}} < 1.$$

Ainsi, f admet deux points fixes $\ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \in]1, +\infty[$ et $\ell' = \frac{1}{\ell} \in]-\infty, 1[$.

- (f) Soit $x \in \mathbb{R}$. L'expression $f \circ f(x)$ est bien définie si, et seulement si, $x \in D$ et $f(x) \in D$, ce qui équivaut à $x \neq 1$ et $f(x) \neq 1$.

Résolvons, pour $x \neq 1$, l'équation :

$$f(x) = 1 \Leftrightarrow \frac{2x-1}{x-1} = 1 \Leftrightarrow 2x-1 = x-1 \Leftrightarrow x = 0.$$

Ainsi, le domaine de définition de $f \circ f$ est $\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

Soit $x \in]1, +\infty[$. Alors $f \circ f(x)$ est bien défini, et :

$$f \circ f(x) = f\left(\frac{2x-1}{x-1}\right) = \frac{2\frac{2x-1}{x-1}-1}{\frac{2x-1}{x-1}-1} = \frac{4x-2-(x-1)}{2x-1-(x-1)} = \frac{3x-1}{x} = 3 - \frac{1}{x}.$$

2. (a) Calculons (en privilégiant l'utilisation de $f \circ f$ à celle de f car son expression est plus simple pour les calculs) :

$$u_1 = f(u_0) = \frac{2u_0-1}{u_0-1} = \frac{6-1}{3-1} = \frac{5}{2}, \quad u_2 = f \circ f(u_0) = 3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3},$$

$$u_3 = f \circ f(u_1) = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5}, \quad u_4 = f \circ f(u_2) = 3 - \frac{3}{8} = \frac{21}{8}.$$

On remarque que $u_0 > u_1$ et que $u_1 < u_2$: la suite (u_n) n'est donc pas monotone.

- (b) La fonction f est décroissante sur l'intervalle $J =]1, +\infty[$, et satisfait $f\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{8}{3} \leq 3$ et $f(3) = \frac{5}{2}$. Ainsi, $f\left(\left[\frac{5}{2}, 3\right]\right) \subset \left[\frac{5}{2}, 3\right]$ et l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ est stable par f . Comme de plus u_0 appartient à $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$, on montre par récurrence, comme dans la question 1.(d), que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \quad \frac{5}{2} \leq u_n \leq 3.$$

- (c) Supposons la suite (u_n) convergente et notons α sa limite. Par passage à la limite dans les inégalités obtenues à la question précédente, α appartient à l'intervalle $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$. De plus, par définition de la suite (u_n) , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = f(u_n).$$

En passant à la limite dans cette égalité (on utilise ici la caractérisation séquentielle de la limite et la continuité de f sur D) :

$$\alpha = f(\alpha).$$

Ainsi, α est un point fixe de f strictement supérieur à 1. Par la question 1.(e), $\alpha = \ell$ nécessairement. Ainsi, si (u_n) est convergente, alors sa limite est ℓ .

3. (a) Notons comme dans l'énoncé $a = \frac{4}{21}$ et $b = \frac{46}{21}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} \leq au_n + b &\Leftrightarrow \frac{2u_n - 1}{u_n - 1} \leq au_n + b \underset{u_n > 1}{\Leftrightarrow} 2u_n - 1 \leq (au_n + b)(u_n - 1) \\ &\Leftrightarrow 0 \leq au_n^2 + \underbrace{(b - a - 2)}_{=0} u_n + 1 - b \\ &\Leftrightarrow 0 \leq 4u_n^2 - 25 \Leftrightarrow \frac{25}{4} \leq u_n^2. \end{aligned}$$

Or cette dernière inégalité est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, puisque $u_n \geq \frac{5}{2}$ par la question 2.(b).

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq au_n + b.}$

- (b) Définissons la suite (α_n) par $\alpha_0 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b$.

Montrons par récurrence que $u_n \leq \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

I La propriété est trivialement vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 3 = \alpha_0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n \leq \alpha_n$. Par la question précédente :

$$u_{n+1} \leq au_n + b \leq a\alpha_n + b = \alpha_{n+1}$$

par hypothèse de récurrence, en notant bien que $a \geq 0$. D'où la propriété au rang $n+1$.

Par le principe de récurrence, $\boxed{u_n \leq \alpha_n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

La suite (α_n) est arithmético-géométrique. Déterminons son expression explicite. Cherchons pour cela $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha = a\alpha + b. \quad (*)$$

Puisque $a \neq 1$, l'unique solution de $(*)$ est $\alpha = \frac{b}{1-a} = \frac{46}{21(1-\frac{4}{21})} = \frac{46}{17}$. D'autre part, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_{n+1} = a\alpha_n + b. \quad (**).$$

En soustrayant $(*)$ par $(**)$:

$$(\alpha_{n+1} - \alpha) = a(\alpha_n - \alpha).$$

La suite $(\alpha_n - \alpha)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison a , de sorte que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\alpha_n - \alpha = a^n(\alpha_0 - \alpha), \quad \text{soit} \quad \alpha_n = a^n(3 - \alpha) + \alpha.$$

Puisque $|a| < 1$, $\boxed{\text{la suite } (\alpha_n) \text{ converge vers } \alpha = \frac{46}{17}.}$

- (c) Puisque (α_n) , par définition de la limite avec $\varepsilon = \frac{1}{17}$, il existe un rang N tel que :

$$\forall n \geq N, \quad \frac{45}{17} \leq \alpha_n \leq \frac{47}{17}.$$

Par l'inégalité obtenue à la question précédente, pour tout $n \geq N$:

$$\boxed{u_n \leq \alpha_n \leq \frac{47}{17}.}$$

Puisque $\frac{47}{17} \leq 3$, $\boxed{\text{cette majoration améliore celle obtenue en question 2.(b).}$

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+1} = u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) = f \circ f(u_{2n+1}) = f \circ f(v_n) = 3 - \frac{1}{v_n}.$$

Et de même :

$$w_{n+1} = 3 - \frac{1}{w_n}.$$

- (b) La fonction f étant décroissante sur $]1, +\infty[$, $f \circ f$ est croissante sur cet intervalle. De plus :

$$f \circ f\left(\frac{5}{2}\right) = 3 - \frac{2}{5} = \frac{13}{5} \geq \frac{5}{2}, \quad f \circ f(\ell) = f(\ell) = \ell, \quad f \circ f(3) = 3 - \frac{1}{3} \leq 3.$$

Ainsi, les intervalles $\left[\frac{5}{2}, \ell\right]$ et $[\ell, 3]$ sont des intervalles stables par $f \circ f$, et contiennent respectivement $v_0 = \frac{5}{2}$ et $w_0 = 3$.

En procédant par récurrence comme à la question 1.(d), on montre que

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \frac{5}{2} \leq v_n \leq \ell \text{ et } \ell \leq w_n \leq 3.}$$

- (c) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n \leq v_{n+1}$ et $w_{n+1} \leq w_n$.

I Par les calculs déjà effectués :

$$v_1 = u_3 = \frac{13}{5} \geq \frac{5}{2} = u_1 = v_0$$

et :

$$w_1 = u_2 = \frac{8}{3} \leq 3 = u_0 = w_0.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $v_n \leq v_{n+1}$ et $w_{n+1} \leq w_n$.

Par croissance de la fonction $f \circ f$:

$$v_{n+1} = f \circ f(v_n) \leq f \circ f(v_{n+1}) = v_{n+2} \quad \text{et} \quad w_{n+2} = f \circ f(w_{n+1}) \leq f \circ f(w_n) = w_{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, les suites (v_n) et (w_n) sont respectivement croissante et décroissante.

La suite (v_n) est croissante et majorée par ℓ . Elle converge donc vers une limite x appartenant à $\left[\frac{5}{2}, \ell\right]$. De plus, on montre de même qu'à la question 2.(c) que x est un point fixe de $f \circ f$. Mais alors :

$$3 - \frac{1}{x} = x, \quad \text{soit} \quad x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Mais on l'a vu, cette équation n'admet qu'une unique solution dans $]1, +\infty[$, à savoir ℓ . Ainsi, la suite (v_n) converge vers ℓ .

En procédant de même, on montre que (w_n) converge vers ℓ . D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n - v_n) = \ell - \ell = 0.$$

Les suites (v_n) et (w_n) sont donc adjacentes.

- (d) Les suites extraites paire et impaire de (u_n) convergent vers la même limite ℓ . Par le cours, la suite (u_n) converge donc vers ℓ .

5. (a) f est continue sur $[\frac{5}{2}, 3]$, dérivable sur $] \frac{5}{2}, 3[$ et pour tout $x \in] \frac{5}{2}, 3[$:

$$|f'(x)| = \frac{1}{(x-1)^2} \leq \frac{1}{(\frac{5}{2}-1)^2} = \frac{4}{9}.$$

Donc, avec l'inégalité des accroissements finis,

$$\forall x, y \in \left[\frac{5}{2}, 3 \right], \quad |f(y) - f(x)| \leq \frac{4}{9} |y - x|.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque ℓ et u_n appartiennent à l'intervalle $[\frac{5}{2}, 3]$:

$$|f(u_n) - f(\ell)| \leq \frac{4}{9} |u_n - \ell|.$$

Comme $u_{n+1} = f(u_n)$ et $f(\ell) = \ell$, on a finalement :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |u_n - \ell|.$$

- (b) Procédons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

I Pour $n = 0$:

$$0 \leq u_0 - \ell = 3 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \leq \frac{3 - \sqrt{4}}{2} = \frac{1}{2}.$$

D'où la propriété au rang $n = 0$.

H Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons la propriété établie au rang n .

Par la question précédente, puis par hypothèse de récurrence :

$$|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |u_n - \ell| \leq \frac{4}{9} \times \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^n = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^{n+1}.$$

D'où la propriété au rang $n + 1$.

Par le principe de récurrence, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (c) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9} \right)^n = 0$, par théorème des gendarmes, (u_n) converge et sa limite est ℓ .

Exercice 2 (Dénombrement)

1. C'est du cours : le cardinal de $\mathfrak{S}_n$ est $n!$.

2. On a $\mathfrak{S}_1 = \{\text{id}_{\{1\}}\}$, $\mathfrak{S}_2 = \left\{ \text{id}_{\{1,2\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$ et :

$$\mathfrak{S}_3 = \left\{ \text{id}_{\{1,2,3\}}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

On observe alors que $d_1 = 0, d_2 = 1$ et $d_3 = 2$ (seules deux permutations n'ont pas de point fixe dans $\mathfrak{S}_3$).

3. (a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq \ell \leq k \leq n$. Calculons :

$$\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \frac{n!}{\cancel{k!} (n-k)! \ell! (k-\ell)!} = \frac{n!}{\ell! (n-\ell)! \ell! (k-\ell)!} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}.$$

Autre méthode. Dans un ensemble E à n éléments, dénombrons de deux manières différentes le nombre de parties A et B à k et ℓ éléments avec $k \geq \ell$ et $B \subset A$:

- pour construire de telles parties, on peut choisir une partie A à k éléments de E , puis une partie B à ℓ éléments de A . Il y a $\binom{n}{k} \times \binom{k}{\ell}$ manières de choisir de telles parties ;
- on peut aussi choisir une partie B à ℓ éléments de E , puis la compléter à l'aide de $k - \ell$ éléments de $E \setminus B$ afin d'obtenir une partie A à k éléments de E contenant B . Il y a $\binom{n}{\ell} \times \binom{n-\ell}{k-\ell}$ choix possibles en dénombrant de cette manière.

D'où l'égalité
$$\boxed{\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}}.$$

(b) Calculons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{\ell} u_\ell \\ &= \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^k (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} u_\ell \quad \text{par la question précédente} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{k=\ell}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} u_\ell \quad \text{en permutant les deux sommes} \\ &= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} \quad \text{par le glissement d'indice } i = k - \ell \end{aligned}$$

Si $\ell = n$, alors $\sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = (-1)^0 \binom{0}{0} = 1$. Si $0 \leq \ell < n$, par la formule du binôme :

$$\sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = (1 + -1)^{n-\ell} = 0.$$

Ainsi, en reprenant le calcul précédent :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} u_\ell \sum_{i=0}^{n-\ell} (-1)^{n-\ell-i} \binom{n-\ell}{i} = u_n.$$

D'où la formule d'inversion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k.}$$

4. (a) Soit $n \geq 1$. Partitionnons $\mathfrak{S}_n$ selon le nombre de points fixes de chaque permutation σ :

- si σ n'a aucun point fixe, c'est un dérangement. Il y a d_n telles permutations ;
- si σ a un point fixe $a \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors σ est un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a\}$. Dénombrons de telles permutations : il y a $\binom{n}{1}$ choix possibles pour le point fixe a , puis d_{n-1} dérangements possibles d'un ensemble à $n - 1$ éléments, soit en tout $\binom{n}{1} \times d_{n-1}$ telles permutations ;
- plus généralement, si σ est une permutation ayant $k \in \llbracket 1, n-2 \rrbracket$ points fixes $a_1, \dots, a_k$, elle induit un dérangement de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$. Il y a $\binom{n}{k}$ choix possibles pour les k points fixes, et d_{n-k} dérangements d'une partie à $(n - k)$ éléments, soit en tout $\binom{n}{k} d_{n-k}$ telles permutations ;
- il n'y a qu'une permutation ayant $n - 1$ points fixes ou ayant n points fixes, à savoir l'identité. Ce qui correspond bien à $\binom{n}{n-1} d_1 + \binom{n}{n-1} d_0 = 1$ choix possible.

Ainsi, puisque $\text{Card}(\mathfrak{S}_n) = n!$, on obtient :

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_{n-k} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{n-i} d_i = \boxed{\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} d_i}.$$

(b) Par la formule d'inversion, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \frac{n!}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

5. (a) $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

(b) Avec la formule précédente :

$$\begin{aligned} \text{Card}(A \cup B \cup C) &= \text{Card}((A \cup B) \cup C) \\ &= \text{Card}(A \cup B) + \text{Card}(C) - \text{Card}((A \cup B) \cap C) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B) + \text{Card}(C) \\ &\quad - \text{Card}((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}((A \cap C) \cap (B \cap C)) \\ &= \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) - \text{Card}(A \cap B) \\ &\quad - \text{Card}(A \cap C) - \text{Card}(B \cap C) + \text{Card}(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

(c) Notons $\mathcal{P}(n)$ la propriété : "si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k})"$$

Montrons par récurrence que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

I Pour $n = 2$, il s'agit de la formule du cours :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B).$$

H Soit $n \geq 2$. Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie.

Soient $A_1, \dots, A_{n+1}$ des parties finies de E . Alors :

$$\begin{aligned} &\text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) \\ &= \text{Card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \text{Card}(A_{n+1}) - \text{Card}((A_1 \cup \dots \cup A_n) \cap A_{n+1}) \quad (\text{cas } n = 2) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \text{Card}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1})) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=1}^n (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_\ell \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_\ell} \cap A_{n+1}) \quad (\text{avec } \mathcal{P}(n)) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) + \text{Card}(A_{n+1}) \\ &\quad - \sum_{\ell=2}^{n+1} (-1)^\ell \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &\quad + \sum_{\ell=1}^{n+1} (-1)^{\ell+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{\ell-1} \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_{\ell-1}} \cap A_{n+1}) \end{aligned}$$

À $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ fixé dans la première somme figure toutes les intersections de k ensembles parmi $A_1, \dots, A_n$ (sans A_{n+1}). Et à $\ell \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ fixé dans la seconde somme figure toutes les intersections de $\ell-1$ ensembles parmi $A_1, \dots, A_n$, avec A_{n+1} . En regroupant ces deux sommes, on obtient pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, toutes les intersections de k ensembles parmi $A_1, \dots, A_{n+1}$, ce qui donne :

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

et ainsi $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Par le principe de récurrence, nous avons donc démontré la formule du crible.

6. (a) Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. L'ensemble $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}$ est constitué des permutations fixant $i_1, i_2, \dots, i_k$. La donnée d'une telle permutation est totalement déterminée par celle d'une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{i_1, \dots, i_k\}$, c'est-à-dire d'un ensemble à $(n-k)$ éléments : il y a $(n-k)!$ telles permutations. Ainsi :

$$\boxed{\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n-k)!}$$

- (b) Une permutation σ n'est pas un dérangement si, et seulement si, elle admet au moins un point fixe, ce qui équivaut à l'existence d'un entier $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\sigma(i) = i$. D'où l'égalité suivante :

$$\overline{D_n} = \bigcup_{i=1}^n A_i.$$

Par la formule du crible :

$$\begin{aligned} \text{Card}(\overline{D_n}) &= \text{Card}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}) \\ &= \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} (n-k)! \end{aligned}$$

À k fixé, choisir k entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ revient à choisir k éléments parmi n . D'où :

$$\text{Card}(\overline{D_n}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)! = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!}.$$

Et finalement :

$$d_n = \text{Card}(\mathfrak{S}(E)) - \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \frac{n!}{k!} = n! + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{n!}{k!} = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 3 (Un problème de point fixe)

1. Par définition, la partie A est incluse dans $[0, 1]$, elle est donc bornée, majorée par 1 et minorée par 0. Reste à montrer qu'elle est non vide.

Considérons pour cela $h : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - x$. Cette fonction est continue car composée de fonctions qui le sont, et satisfait :

$$h(0) = f(0) - 0 = f(0) \geq 0 \quad \text{et} \quad h(1) = f(1) - 1 \leq 0$$

car f est à valeurs dans $[0, 1]$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $c \in [0, 1]$ tel que $h(c) = 0$. Ainsi, c appartient à A et A est non vide.

En tant que partie non vide, majorée et minorée, A possède une borne inférieure a et une borne supérieure b . Notons au passage que $a \geq 0$ et $b \leq 1$ puisque A est majorée par 1 et minorée par 0.

2. Par caractérisation séquentielle de la borne supérieure, il existe une suite (x_n) d'éléments de A qui converge vers b . Mais alors, par définition de A , pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x_n) = x_n.$$

Puisque f est continue en b , par passage à la limite quand $n \rightarrow +\infty$ (on utilise ici la caractérisation séquentielle de la continuité) :

$$f(b) = b.$$

Donc b appartient bien à A .

3. En utilisant que $b \in A$ et que g et f commutent :

$$f(g(b)) = f \circ g(b) = g \circ f(b) = g(f(b)) = g(b).$$

Ainsi, $g(b)$ appartient à A .

Puisque b est la borne supérieure de A , b est en particulier un majorant de A . Et comme $g(b)$ appartient à A , on en déduit l'inégalité $g(b) \leq b$.

En effectuant une étude similaire, on montrerait que $a \in A$, que $g(a) \in A$, puis que $g(a) \geq a$.

4. Considérons alors $\varphi : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - g(x)$. Cette fonction est continue sur $[0, 1]$ en tant que composée de fonctions qui le sont. De plus :

$$\varphi(a) = f(a) - g(a) = a - g(a) \leq 0 \quad \text{et} \quad \varphi(b) = f(b) - g(b) = b - g(b) \geq 0.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel c entre a et b tel que $\varphi(c) = 0$.

On peut donc conclure à l'existence d'un réel c appartenant à $[0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

Exercice 4 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants)

1. (a) Les relations
$$\begin{cases} u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} = u_{n+2} \\ u_{n+1} = u_{n+1} \end{cases}$$
 s'écrivent matriciellement sous la forme

$$\begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \boxed{X_{n+1} = AX_n} \quad \text{puisque}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = A.$$

- (b) On montre, par récurrence, que, pour tout entier $n \geq 0$, $X_n = A^n X_0$.

I La formule est vraie pour $n = 0$ car $A^0 = I_3$ et $X_0 = A^0 X_0$.

[H] Soit n un entier naturel pour lequel $X_n = A^n X_0$. Alors :

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

La propriété est donc encore vraie pour l'entier $n + 1$.

Par principe de récurrence, $\boxed{\text{pour tout entier } n \geq 0, X_n = A^n X_0.}$

2. (a) On trouve $PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \boxed{= 4I}.$

On en déduit que $P \times (\frac{1}{4}Q) = \frac{1}{4}PQ = I_3$, ce qui montre que $\boxed{P \text{ est inversible, et } P^{-1} = \frac{1}{4}Q.}$

(b) On trouve

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

et

$$AP = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, $AP = PT$, et en multipliant cette égalité, membre à membre à droite par P^{-1} , on obtient $\boxed{A = PTP^{-1}}.$

Montrons par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $A^n = PT^n P^{-1}$.

[I] Pour $n = 0$, $A^0 = I_3$ et $PT^0 P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I_3$.

[H] Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $A^n = PT^n P^{-1}$. Alors :

$$A^{n+1} = A^n A = (PT^n P^{-1}) (PTP^{-1}) = PT^n (P^{-1}P) TP^{-1} = PT^{n+1} P^{-1}$$

car $P^{-1}P = I_3$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$

Par principe de récurrence, $\boxed{A^n = PT^n P^{-1} \text{ entier } n \geq 0.}$

3. (a) Calculons $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$

D'où $\boxed{N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3 \text{ pour tout entier } k \geq 2.}$

(b) On trouve $DN = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = ND.$

De $N = T - D$, on déduit $T = D + N$. Puisque D et N **commutent**, la formule du binôme donne, pour tout entier $n \geq 2$:

$$T^n = (D + N)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D^{n-k} N^k = \binom{n}{0} D^n N^0 + \binom{n}{1} D^{n-1} N = D^n + nD^{n-1}N.$$

car $N^k = 0$ pour tout $k \geq 2$.

D étant diagonale, $D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $D^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, d'où

$$D^{n-1}N = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il vient :

$$\begin{aligned} T^n &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2n \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire $T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Et cette égalité est encore satisfaite lorsque

$n = 0$ et $n = 1$.

(c) Calculons

$$\begin{aligned} PT^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

puis :

$$A^n = PT^n P^{-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix} \times \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'où $A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 & \frac{3}{2}n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - \frac{1}{2}n - 1 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 & 3n - 4 \times 2^n + 5 & 2^n - n - 1 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 & 6n - 4 \times 2^n + 4 & 2^n - 2n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. u_n est le dernier coefficient du vecteur-colonne $X_n = A^n X_0$.

Comme $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, on obtient :

$$X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 4 \times 2^n - n - 3 \\ 4 \times 2^n - 2n - 4 \\ 4 \times 2^n - 4n - 4 \end{pmatrix}$$

et donc :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 \times 2^n - 4n - 4) = 4 - \frac{4n}{2^n} - \frac{4}{2^n}.$$

(b) Par croissances comparées, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$. D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$.