

Devoir surveillé du Samedi 31 Janvier

La calculatrice est interdite. Durée : 3h30.

Exercice 1 (Une suite récurrente faisant intervenir une homographie)

On pose $D =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$. Pour $x \in D$, on pose $f(x) = \frac{2x-1}{x-1}$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. (a) Montrer que f est dérivable sur D et donner l'expression de $f'(x)$ en fonction de $x \in D$.
 (b) Dresser le tableau de variations de f sur D . On précisera les limites aux bornes du domaine D et les éventuelles asymptotes à la courbe de f .
 (c) Montrer que $f(]1, +\infty[) \subset]1, +\infty[$.
 (d) En déduire que la suite (u_n) est bien définie et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.
 (e) Montrer que f admet deux points fixes ℓ et ℓ' avec $f(\ell) = \ell = \frac{3+\sqrt{5}}{2} \in]1, +\infty[$ et $f(\ell') = \ell' = \frac{1}{\ell} = \frac{3-\sqrt{5}}{2} \in]-\infty, 1[$.
 (f) Déterminer le domaine de définition de $f \circ f$ et vérifier que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f \circ f(x) = 3 - \frac{1}{x}$.
2. (a) Calculer u_n pour $n \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle monotone ?
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{2} \leq u_n \leq 3$.
 (c) Montrer que si (u_n) est convergente, alors sa limite est ℓ .
3. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} \leq au_n + b$ avec $a = \frac{4}{21}$ et $b = \frac{46}{21}$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \alpha_n$ avec (α_n) une suite arithmético-géométrique à déterminer explicitement et qui tend vers $\frac{46}{17}$.
 (c) Justifier qu'à partir d'un certain rang, $u_n \leq \frac{47}{17}$. Cela améliore-t-il la majoration obtenue en question 2.(b) ?
4. On considère les deux suites extraites (v_n) et (w_n) de (u_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_{2n+1}$ et $w_n = u_{2n}$.
 (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 3 - \frac{1}{v_n}$ et $w_{n+1} = 3 - \frac{1}{w_n}$.
 (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{2} \leq v_n \leq \ell$ et $\ell \leq w_n \leq 3$.
 (c) Montrer que (v_n) et (w_n) sont deux suites adjacentes.
 (d) Montrer que (u_n) converge vers ℓ .
5. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - \ell| \leq \frac{4}{9} |u_n - \ell|$.
 (b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \ell| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.
 (c) Retrouver le résultat de la question 4.(d).

Exercice 2 (Dénombrement)

Dans tout cet exercice, n est un entier naturel non nul. On note $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$, c'est-à-dire l'ensemble des bijections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans lui-même.

Une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ peut être représentée à l'aide d'un tableau à deux lignes figurant la correspondance réalisée :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Par exemple :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

sont deux permutations de $\mathfrak{S}_4$ telles que $\sigma(1) = 3, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1$ et $\tau(1) = 4, \tau(2) = 2, \tau(3) = 1, \tau(4) = 3$.

On appelle *dérangement* de $\mathfrak{S}_n$ toute permutation σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ ne possédant aucun point fixe, c'est-à-dire telle que $\sigma(k) \neq k$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note D_n l'ensemble des dérangements de $\llbracket 1, n \rrbracket$. Par exemple, $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ est un dérangement de $\mathfrak{S}_4$, $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ n'est pas un dérangement de $\mathfrak{S}_4$.

Le but de cet exercice est de déterminer de deux manières différentes le nombre $d_n = \text{Card}(D_n)$ de dérangements de $\mathfrak{S}_n$.

Questions préliminaires

1. Rappeler le cardinal de $\mathfrak{S}_n$.
2. Expliciter tous les éléments de $\mathfrak{S}_n$ pour $n = 1, 2, 3$. En déduire d_1, d_2 et d_3 .

Méthode 1 : à l'aide de la formule d'inversion de Pascal.

3. (a) Soient $k, \ell \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq \ell \leq k \leq n$. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{k}{\ell} = \binom{n}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell}$.
 (b) Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels, et $(v_k)_{k \geq 0}$ la suite définie par :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad v_k = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} u_\ell.$$

Établir la formule d'inversion :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k.$$

4. (a) On pose $d_0 = 1$. En partitionnant $\mathfrak{S}_n$ selon le nombre de points fixes de chaque permutation, montrer que pour tout $n \geq 1$:

$$n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} d_k.$$

- (b) En déduire une expression de d_n en fonction de n .

Méthode 2 : à l'aide de la formule du crible.

5. (a) Soient A et B deux parties d'un ensemble E . Rappeler la formule de $\text{Card}(A \cup B)$.
 (b) Soient A, B et C trois parties d'un ensemble E .
 Démontrer une formule pour $\text{Card}(A \cup B \cup C)$.

- (c) Prouver par récurrence sur $n \geq 2$ que si $A_1, \dots, A_n$ sont n parties finies d'un ensemble E , alors

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \text{Card}(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}).$$

Cette formule est appelée *formule du crible*.

6. Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, notons $A_i = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \sigma(i) = i\}$.

- (a) Soient $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$. Justifier que :

$$\text{Card}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}) = (n - k)!.$$

- (b) En remarquant que $\overline{D_n} = \bigcup_{i=1}^n A_i$, montrer à l'aide de la formule du crible que :

$$d_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Exercice 3 (Un problème de points fixes)

Soient $f, g : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ deux fonctions continues telles que $f \circ g = g \circ f$.

On note $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f .

- Justifier que A possède une borne inférieure que l'on notera a et une borne supérieure que l'on notera b .
- En utilisant par exemple une caractérisation séquentielle de la borne supérieure, montrer que $b \in A$.
- Prouver que $g(b) \in A$. Quelle inégalité liant $g(b)$ et b en déduit-on ? Que peut-on dire pour $g(a)$ et a ?
- Montrer enfin qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que $f(c) = g(c)$.

On pourra considérer la fonction $\varphi : x \in [0, 1] \mapsto f(x) - g(x)$.

Exercice 4 (Étude d'une suite récurrente linéaire d'ordre 3 à coefficients constants)

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n , soit

X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

- Justifier pour tout entier naturel n , l'égalité : $X_{n+1} = AX_n$.
 - En déduire pour tout entier naturel n , la relation $X_n = A^n X_0$.
- Soit P , Q et T les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Calculer le produit PQ . En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1} .
- (b) Calculer les produits PT et AP . En déduire pour tout entier naturel n , l'égalité $A^n = PT^n P^{-1}$.

3. Soit D la matrice définie par : $D = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

- (a) Déterminer pour tout entier $k \geq 2$, la matrice N^k .
- (b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n , on a :

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) En déduire pour tout entier naturel n , l'expression de la matrice A^n .
4. (a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n .
- (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
-