Correction - DS 5

Devoir surveillé du Samedi 7 Mars

Exercice 1

1. (a) f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ (c'est un polynôme). Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n'(x) = (n+1)x^n + nx^{n-1} = x^{n-1}\left((n+1)x+n\right).$$

On a alors 2 cas :

- Si n est impair : $n-1$ est pair et supérieur ou égal à 2. Donc $x^{n-1} \geq 0$ et f_n' est du signe de $(n+1)x+n$.

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(-\frac{n}{n+1})$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

- Si n est pair :

x	$-\infty$		$-\frac{n}{n+1}$		0		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(-\frac{n}{n+1})$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

(b) On a, pour tout $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} f_n(-\frac{n}{n+1}) &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} + \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n}\left(-\frac{n}{n+1}+1\right) \\ &= \left(-\frac{n}{n+1}\right)^{n} \times \frac{1}{n+1} = \frac{(-1)^n n^n}{(n+1)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Si n est pair, $f_n(-\frac{n}{n+1}) = \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 1 < 2$.

Si n est impair, $f_n(-\frac{n}{n+1}) = -\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} < 0 < 2$.

Ainsi, dans tous les cas, $\boxed{f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2.}$

(c)
- Sur $[0,+\infty[$ (quelque soit la parité de n) : f_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$. D'après le théorème de la bijection, f_n réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur $f_n([0,+\infty[) = [0,+\infty[$. Donc l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution (l'antécédent de 2 par f_n). Remarquons que $f_n(1) = 1^{n+1} + 1^n = 2$ donc 1 est l'unique solution de l'équation $f_n(x) = 2$ sur $[0,+\infty[$.
- Sur $]-\infty, 0]$: On distingue deux cas suivant la parité de n.
  - Si n est impair : Sur $[-\frac{n}{n+1}, 0]$, f_n est négative donc l'équation $f_n(x) = 2$ n'a pas de solution. Sur $]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$, on applique une nouvelle fois le théorème de

la bijection, ce qui démontre que l'équation $f_n(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha_n \in]-\infty, -\frac{n}{n+1}]$.

– Si n est pair : f_n atteint son maximum au point d'abscisse $-\frac{n}{n+1}$. Or d'après la question précédente $f_n(-\frac{n}{n+1}) < 2$. Donc l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution.

Donc, l'équation $x^{n+1} + x^n = 2$ admet $\boxed{\text{deux solutions } x = \alpha_n \text{ et } x = 1 \text{ si } n \text{ est impair}}$, et $\boxed{\text{une unique solution } x = 1 \text{ si } n \text{ est pair.}}$

2. (a) $\det(P) = (-1) \times 1 - 1 \times 1 = -2 \neq 0$ donc P est inversible et

$$\boxed{P^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.}$$

(b) Remarquons que $A = PDP^{-1} \Leftrightarrow D = P^{-1}AP$. On obtient alors $\boxed{D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.}$

3. (a) On a :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\Leftrightarrow X^{n+1} + X^n = A \\ &\Leftrightarrow X^{n+1} + X^n = PDP^{-1} \\ &\Leftrightarrow P^{-1}X^{n+1}P + P^{-1}X^nP = \underbrace{P^{-1}P}_{=I} D \underbrace{P^{-1}P}_{=I} = D. \end{aligned}$$

On pose $Y = P^{-1}XP$. On a $Y^n = (P^{-1}XP)^n = P^{-1}X^nP$ (on peut démontrer cette dernière égalité avec une récurrence). De même $Y^{n+1} = P^{-1}X^{n+1}P$. Donc :

$$\boxed{X \text{ solution de } (E_n) \Leftrightarrow Y^{n+1} + Y^n = D \Leftrightarrow Y \text{ solution de } (E'_n).}$$

(b) Soit Y une solution de (E'_n). Donc $Y^{n+1} + Y^n = D$. Alors :

$$DY = (Y^{n+1} + Y^n)Y = Y^{n+2} + Y^{n+1} = Y(Y^{n+1} + Y^n) = YD.$$

Ainsi, $\boxed{DY = YD.}$

(c) On pose $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Alors :

$$DY = YD \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 2d \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2b = 0 \text{ et } 2c = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = c = 0.}$$

(d) D'après la question précédente, $Y = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Donc $Y^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} Y \text{ solution de } (E'_n) &\Leftrightarrow Y^{n+1} + Y^n = D \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 \\ 0 & d^{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 0 & d^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow a^{n+1} + a^n = 0 \text{ et } d^{n+1} + d^n = 2. \end{aligned}$$

Ainsi $a^{n+1} + a^n = a^n(a+1) = 0$ et donc $a^n = 0$ ou $a + 1 = 0$.
$\boxed{\text{Les seules valeurs possibles pour } a \text{ sont donc } 0 \text{ et } -1.}$

(e) On a vu que :

$$\begin{aligned} X \text{ solution de } (E_n) &\Leftrightarrow Y \text{ solution de } (E'_n) \\ &\Leftrightarrow a^{n+1} + a^n = 0 \text{ et } d^{n+1} + d^n = 2. \end{aligned}$$

D'après la question 1.(c),

- Si n impair : L'équation $d^{n+1} + d^n = 2$ admet deux solutions ($d = \alpha$ et $d = 1$). Il y a donc 4 solutions de (E'_n):

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

- Si n pair : L'équation $d^{n+1} + d^n = 2$ admet une solution ($d = 1$). Il y a donc 2 solutions de (E'_n) :

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.}$$

Il faudrait vérifier réciproquement que les matrices obtenues ci-dessus sont bien solutions de l'équation (E_n) (calculs simples laissés au lecteur).

Enfin, on remarque que deux valeurs différentes de Y donnent deux valeurs différentes pour X. En effet :

$$X_1 = X_2 \Leftrightarrow P^{-1}X_1P = P^{-1}X_2P \Leftrightarrow Y_1 = Y_2.$$

Donc $\boxed{(E_n) \text{ admet 4 solutions si } n \text{ est impair et 2 solutions si } n \text{ est pair.}}$

4. Ici, $n = 3$ donc n est impair. D'après la question précédente, (E'_3) admet 4 solutions :

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad Y_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad Y_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(E_3) admet donc 4 solutions $X_i = PY_iP^{-1}$. On obtient alors (calculs laissés au lecteur) :

$$\boxed{X_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}, \quad X_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1+\alpha & 1+\alpha \\ 1+\alpha & -1+\alpha \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.}$$

Exercice 2

1. Pour faire apparaître $af(x) + b$, il suffit de remplacer x par $f(x)$ dans la relation donnée (puisqu'elle est vraie pour tout réel x elle est aussi vraie pour tous les réels de la forme $f(x)$) :

$$f(f(f(x))) = af(x) + b.$$

Nous disposons d'une autre possibilité pour faire apparaître $f(f(f(x)))$: appliquer la fonction f à $f(f(x))$. En appliquant la fonction f aux deux membres de l'égalité vérifiée par f, on obtient :

$$f(f(f(x))) = f(ax + b).$$

On a donc montré la propriété :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(ax + b) = af(x) + b.}$$

Remarque. Plus abstraitement, il y a deux façons de voir $f \circ f \circ f$: dire que c'est $(f \circ f) \circ f$ (c'est la première relation obtenue) ou encore $f \circ (f \circ f)$ (deuxième relation). La clef est donc en fait **l'associativité de la composition** des applications.

2. On peut dériver pour obtenir la relation voulue sur f'. Attention, le membre de gauche est une fonction composée ! En dérivant cette égalité par rapport à la variable x, on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a\, f'(ax + b) = a\, f'(x).$$

Le réel a étant différent de 0, on en déduit :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(ax + b) = f'(x).}$$

3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique.

   Rappelons qu'il faut introduire la suite auxiliaire $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = u_n - c$ où c est la solution de l'équation $ax + b = x$ qui n'est autre que ℓ.

   Pour $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \ell &= au_n + b - \frac{b}{1-a} \\ &= \frac{au_n - a^2u_n + b - ba - b}{1-a} \\ &= a(u_n - \ell). \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite de terme général $v_n = u_n - \ell$ est géométrique de raison $a \in]0,1[$.

   Ainsi, $\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} a^n(u_0 - \ell) = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.}$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par $u_0 = x$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a\,u_n + b$.

   Le résultat de la deuxième question montre que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f'(u_{n+1}) = f'(u_n).$$

   La suite de terme général $f'(u_n)$ est donc constante. En particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f'(u_n) = f'(u_0).$$

   Or f' est continue et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc, en faisant tendre n vers $+\infty$,

$$f'(\ell) = f'(u_0) = f'(x).$$

   Le réel x ayant été choisi arbitrairement, on a donc la propriété

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(\ell).$$

   Autrement dit, $\boxed{f' \text{ est constante.}}$

5. La fonction f est donc affine : il existe deux réels λ et μ tels que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \lambda x + \mu.$$

   On en déduit

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(f(x)) = \lambda^2 x + (\lambda+1)\mu.$$

   Par définition de f, on a donc

$$\begin{cases} \lambda^2 &= a \\ (\lambda+1)\mu &= b \end{cases}$$

   Nous pouvons alors distinguer deux cas :

   - si $\lambda = \sqrt{a}$, alors $\mu = \dfrac{b}{1+\sqrt{a}}$;
   - si $\lambda = -\sqrt{a}$, alors $\mu = \dfrac{b}{1-\sqrt{a}}$ (ce dernier calcul est licite car $a \neq 1$, donc $\sqrt{a} \neq 1$).

   Finalement, f est de la forme

$$\boxed{x \mapsto x\sqrt{a} + \frac{b}{1+\sqrt{a}} \quad \text{ou} \quad x \mapsto -x\sqrt{a} + \frac{b}{1-\sqrt{a}}.}$$

Mise en garde.

Nous obtenons ainsi une condition nécessaire sur l'expression de f : **si** f est solution du problème **alors** f est de la forme. Il reste à vérifier que les fonctions obtenues conviennent bien (ou, si besoin, à éliminer les solutions parasites). Il s'agit plus précisément d'un raisonnement par analyse-synthèse.

Pour conclure, il est aisé de vérifier (laissé au lecteur) que les deux applications

$$x \mapsto x\sqrt{a} + \frac{b}{1+\sqrt{a}} \quad \text{et} \quad x \mapsto -x\sqrt{a} + \frac{b}{1-\sqrt{a}}$$

vérifient la relation $f(f(x)) = ax + b$ pour tout réel x.

6. En reprenant la démarche et les notations précédentes, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $a > 1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Le raisonnement ci-dessus ne peut alors plus être poursuivi.

   Il faudrait trouver un moyen de remplacer a par son inverse, et se ramener ainsi au cas précédent. On peut y parvenir en faisant intervenir la réciproque de l'application affine $x \mapsto ax + b$, c'est-à-dire $x \mapsto (x - b)/a$.

   Supposons $a > 1$. On a alors, comme précédemment,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = f'(ax + b).$$

   En remplaçant x par $\dfrac{x-b}{a}$, on trouve

$$f'(x) = f'\left(\frac{x}{a} - \frac{b}{a}\right).$$

   On peut donc appliquer le résultat précédent en remplaçant b par $-b/a$ et a par $1/a \in]0,1[$. On en déduit que la fonction f est affine.

   Le calcul de la question 5 reste valable et les fonctions solutions sont définies par les mêmes expressions.

Exercice 3

Partie I. L'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

1. L'existence d'un tel couple relève directement de la définition de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, il s'agit donc surtout de prouver l'unicité. Soient a_1, a_2, b_1, b_2 des entiers tels que $a_1 + b_1\sqrt{7} = a_2 + b_2\sqrt{7}$. Alors $(b_1 - b_2)\sqrt{7} = a_2 - a_1$.

   Si $b_1 \neq b_2$, alors $\sqrt{7} = \frac{a_2-a_1}{b_1-b_2} \in \mathbb{Q}$, ce qui est absurde. Donc $b_1 = b_2$, et donc $a_1 = a_2$.

   Ainsi, $\boxed{\text{tout élément de } \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \text{ s'écrit bien de manière unique sous la forme } a + b\sqrt{7}, (a,b) \in \mathbb{Z}^2.}$

2. Montrons que $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.

   - Le neutre multiplicatif de $\mathbb{R}$ est $1 = 1 + 0\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.
   - Soient $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, et soient $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a_1 + b_1\sqrt{7}$ et $y = a_2 + b_2\sqrt{7}$. Alors :

$$x - y = \underbrace{(a_1 - a_2)}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(b_1 - b_2)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}].$$

     Enfin :

$$xy = \left(a_1 + b_1\sqrt{7}\right)\left(a_2 + b_2\sqrt{7}\right) = \underbrace{a_1a_2 + 7b_1b_2}_{\in\mathbb{Z}} + \underbrace{(a_1b_2 + a_2b_1)}_{\in\mathbb{Z}}\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}].$$

Et donc $\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{7}] \text{ est bien un sous-anneau de } \mathbb{R}.}$

Si $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ était un corps, alors 2 serait inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, et donc il existerait $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$\frac{1}{2} = a + b\sqrt{7}, \text{ soit encore } (2a-1) + 2b\sqrt{7} = 0.$$

Par la question 1, ceci implique que $b = 0$ et $2a - 1 = 0$, ce qui n'est pas possible dans $\mathbb{Z}$. Donc 2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, et $\boxed{\mathbb{Z}[\sqrt{7}] \text{ n'est pas un corps.}}$

3. Vérifions que l'application $\varphi : x \mapsto \overline{x}$ est un automorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

   - $\varphi(1) = \varphi(1 + 0\sqrt{7}) = 1 - 0\sqrt{7} = 1$.
   - Soient $x, y \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, et soient $a_1, b_1, a_2, b_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $x = a_1 + b_1\sqrt{7}$ et $y = a_2 + b_2\sqrt{7}$. En utilisant les calculs déjà effectués :

     $$\begin{aligned}\varphi(x+y) &= \varphi((a_1+a_2) + (b_1+b_2)\sqrt{7}) = (a_1+a_2) - (b_1+b_2)\sqrt{7} \\ &= (a_1 - b_1\sqrt{7}) + (a_2 - b_2\sqrt{7}) = \varphi(x) + \varphi(y)\end{aligned}$$

     et :

     $$\begin{aligned}\varphi(x \times y) &= \varphi((a_1a_2 + 7b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{7}) = (a_1a_2 + 7b_1b_2) - (a_1b_2 + a_2b_1)\sqrt{7} \\ &= (a_1a_2 + 7(-b_1)(-b_2)) + (a_1(-b_2) + a_2(-b_1))\sqrt{7} \\ &= (a_1 - b_1\sqrt{7}) \times (a_2 - b_2\sqrt{7}) = \varphi(x) \times \varphi(y).\end{aligned}$$

     Enfin :

     $$\varphi \circ \varphi(x) = \varphi(a_1 - b_1\sqrt{7}) = a_1 + b_1\sqrt{7} = x$$

     donc $\varphi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}[\sqrt{7}]}$, et φ est bijective.

   Ainsi, $\boxed{x \mapsto \overline{x} \text{ est un automorphisme d'anneau de } \mathbb{Z}[\sqrt{7}].}$

4. (a) Soit $x, x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$. En utilisant le résultat de la question précédente :

   $$N(xx') = (xx') \times \overline{xx'} = (xx') \times \overline{x}\overline{x'} = (x\overline{x})(x'\overline{x'}) \boxed{= N(x)N(x').}$$

   (b) Soit $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$, inversible. Notons $x' \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ son inverse. Alors :

   $$1 = N(1) = N(xx') = N(x)N(x').$$

   Mais $N(x)$ et $N(x')$ sont deux entiers. Ainsi, $N(x) = \pm 1$.

   Inversement, si $x = a + b\sqrt{7}$ est tel que $|N(x)| = 1$. Alors $x \neq 0$ (car $N(0) = 0$), et donc x est inversible dans l'anneau $\mathbb{R}$. Son inverse est

   $$\frac{1}{x} = \frac{1}{a + b\sqrt{7}} = \frac{a - b\sqrt{7}}{(a + b\sqrt{7})(a - b\sqrt{7})} = \frac{a - b\sqrt{7}}{a^2 - 7b^2} = \frac{a}{N(x)} - \frac{b}{N(x)}\sqrt{7}.$$

   Et cet inverse appartient bien à $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ puisque $|N(x)| = 1$. Ainsi, x est bien inversible dans l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$.

   On a donc montré que $\boxed{x \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}] \text{ est inversible si, et seulement si, } N(x) = \pm 1.}$ Et si c'est le cas, $\boxed{\text{son inverse est } \overline{x} \text{ si } N(x) = 1,\ -\overline{x} \text{ si } N(x) = -1.}$

Partie II. Structure du groupe des inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ et équations de Pell-Fermat.

5. Puisque $N(8+3\sqrt{7}) = 8^2 - 7\times 3^2 = 1$, $\boxed{8+3\sqrt{7}\in G.}$

   Et donc $\boxed{G \text{ contient d'autres éléments que } \pm 1.}$

6. On souhaite montrer que $G\cap\,]1,+\infty[$ possède un plus petit élément u.

   (a) Supposons que $x>1$ et $N(x)=1$. Alors :
   $$0<\frac{1}{x}<1<x.$$
   Or, par la question 4.(b), $\dfrac{1}{x}=\overline{x}=a-b\sqrt{7}$. Ainsi, $a-b\sqrt{7}<a+b\sqrt{7}$, et donc $\boxed{b\geq 1}$. Et alors $a-b\sqrt{7}>0$, donc $a>b\sqrt{7}>0$. Puisque $a\in\mathbb{Z}$, $\boxed{a\geq 1.}$

   (b) On a toujours l'inégalité :
   $$0<\frac{1}{x}<1<x$$
   avec cette fois $\dfrac{1}{x}=-\overline{x}=-a+b\sqrt{7}$. Ainsi, $-a+b\sqrt{7}<a+b\sqrt{7}$ et donc $\boxed{a\geq 1}$. Et puisque $b\sqrt{7}>a$, il vient $\boxed{b\geq 1.}$

   (c) Soit $x=a+b\sqrt{7}\in G\cap]1,M]$. Par la question précédente, $a\geq 1$ et $b\geq 1$. On en déduit que :
   $$1\leq a\leq a+b\sqrt{7}\leq M \text{ et } 1\leq b\leq b\sqrt{7}\leq a+b\sqrt{7}\leq M.$$
   Autrement dit, $(a,b)\in[\![1,M]\!]^2$. Donc il y a au plus M^2 couples (a,b) tels que $a+b\sqrt{7}\in G\cap]1,M]$. Donc $\boxed{G\cap]1,M] \text{ est fini.}}$

   (d) Nous avons déjà dit que G contient $8+3\sqrt{7}$. Prenons donc M un entier supérieur ou égal à $8+3\sqrt{7}$. Alors $G\cap\,]1,M]$ est non vide et fini, il possède donc un plus petit élément u.

   Pour tout $x\in G\cap\,]1,+\infty[$, on a deux cas :

   - soit $x\leq M$, et alors $u\leq x$;
   - soit $x>M$, et alors $u\leq M\leq x$.

   Donc $\boxed{u \text{ est le plus petit élément de } G\cap\,]1,+\infty[.}$

7. (a) Puisque $u>1$, $u^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Et en particulier, il existe $n_0\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $k\geq n_0$, $u^k>v$.

   Soit $A_v=\left\{k\in\mathbb{N}\mid u^k\leq v\right\}$. C'est une partie non vide de $\mathbb{N}$ (car contient 0), majorée par n_0. Elle admet donc un plus grand élément k. Et puisque $k\in A_v$ et $k+1\notin A_v$, $\boxed{u^k\leq v<u^{k+1}.}$

   (b) On a donc $1\leq \frac{v}{u^k}<u$. Et puisque v et u^k sont deux éléments de G, qui est un groupe, $\frac{v}{u^k}=v\left(u^k\right)^{-1}$ appartient à G.

   Puisque u est le plus petit élément de $G\cap\,]1,+\infty[$, et que $\frac{v}{u^k}<u$, il suit que $\frac{v}{u^k}=1$, si bien que $\boxed{v=u^k.}$

   (c) Puisque $u\in\mathbb{R}_+^*$ (car $u>1$), $u^k>0$ pour tout $k\in\mathbb{Z}$, et donc $\langle u\rangle\subset G\cap\mathbb{R}_+^*$.

   Inversement, soit $v\in G\cap\mathbb{R}_+^*$.
   - Si $v>1$, alors par la question précédente, $v\in\left\{u^k,k\in\mathbb{N}\right\}\subset\langle u\rangle$.
   - Si $v=1$, alors $v=u^0\in\langle u\rangle$.
   - Si $v<1$, alors $\frac{1}{v}>1$, et donc par la question précédente, il existe $k\in\mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{v}=u^k$, et donc $v=u^{-k}\in\langle u\rangle$.

   Donc $\boxed{G\cap\mathbb{R}_+^*=\langle u\rangle.}$

8. Soient $(\varepsilon_1, k_1), (\varepsilon_2, k_2)$ deux éléments de $\{-1, 1\} \times \mathbb{Z}$. Alors :

$$f((\varepsilon_1, k_1) \cdot (\varepsilon_2, k_2)) = f(\varepsilon_1\varepsilon_2, k_1 + k_2) = \varepsilon_1\varepsilon_2 u^{k_1+k_2} = \varepsilon_1 u^{k_1} \varepsilon_2 u^{k_2} = f(\varepsilon_1, k_1) f(\varepsilon_2, k_2)$$

Donc $\boxed{f \text{ est bien un morphisme de groupes.}}$

Soit $(\varepsilon, k) \in \mathrm{Ker}(f)$. Alors :

$$f(\varepsilon, k) = \varepsilon u^k = 1.$$

Puisque $u^k > 0$, on a $\varepsilon = 1$. Et alors $u^k = 1$, d'où $k = 0$. Donc $\mathrm{Ker}\, f = \{(1, 0)\}$, où $(1, 0)$ est le neutre si bien que f est injectif.

Enfin, si $x \in G$, alors :

- soit $x > 0$, et donc par la question 9.c, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = u^k = f(1, k)$.
- soit $x < 0$, mais alors $-x > 0$, et donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = -u^k = f(-1, k)$.

Dans tous les cas, x possède un antécédent par f, qui est donc surjectif.

Ainsi, f est bijectif : c'est un $\boxed{\text{isomorphisme de groupes.}}$

9. (a) Notons que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ est une solution de $x^2 - 7y^2 = 1$ si et seulement si $\alpha = x + y\sqrt{7}$ est tel que $N(\alpha) = 1$.

Nous savons déjà que $N(8 + 3\sqrt{7}) = 1$, et donc $\boxed{(8, 3) \text{ est solution de l'équation.}}$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $N\left((8 + 3\sqrt{7})^k\right) = N(8 + 3\sqrt{7})^k = 1$, si bien que si on note (a_k, b_k) les entiers tels que $(8 + 3\sqrt{7})^k = a_k + b_k\sqrt{7}$, alors $a_k^2 - 7b_k^2 = 1$. Et donc (a_k, b_k) est solution. Reste à remarquer que puisque $8+3\sqrt{7} > 1$, la suite $\left((8 + 3\sqrt{7})^k\right)_k$ est strictement croissante, et donc injective.

Ainsi, $\boxed{\text{il y a une infinité de solutions à l'équation } x^2 - 7y^2 = 1.}$

Nous avons déjà dit que $(8, 3)$ est l'une d'entre elles. Et puisque $(8 + 3\sqrt{7})^2 = 64 + 7 \times 9 + 48\sqrt{7} = 127 + 48\sqrt{3}$, alors $\boxed{(127, 48) \text{ est une deuxième solution.}}$

(b) Là encore, les couples (x, y) solutions de $x^2 - 7y^2 = -1$ correspondent aux élément $x + y\sqrt{7} \in \mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ tels que $N(x + y\sqrt{7}) = -1$.

Notons que de tels éléments sont nécessairement dans G, et il s'agit donc de déterminer le nombre d'éléments de G dont la norme vaut -1.

Soit $g \in G$. On a deux cas :

- si $g \in G \cap \mathbb{R}_+^* = \langle u \rangle$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $g = u^k$. Mais alors :

$$N(g) = N(u^k) = N(u)^k = N(8 + 3\sqrt{7})^k = 1$$

et donc $N(g) \neq -1$.
- si $g \in G \cap \mathbb{R}_-^*$. Alors $-g > 0$ et appartient toujours à G car $N(-g) = N(-1)N(g) = N(g)$. Donc $-g$ appartient à $G \cap \mathbb{R}_+^*$, de sorte que $N(-g) = 1$ par le cas précédemment traité. Ainsi, dans ce cas également, $N(g) = 1$.

Ainsi, il n'existe aucun élément de $\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$ de norme -1, et donc l'équation $\boxed{x^2 - 7y^2 = -1 \text{ n'a pas de solution.}}$

Exercice 4

1. Montrons par récurrence que la suite est bien définie[1] et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$.

[1] Il se pourrait en effet qu'à un certain rang $n \in \mathbb{N}^*$, on ait $u_{n-1} < n$ et que $u_n = \sqrt{u_{n-1} + n}$ ne soit pas défini.

$\boxed{\mathbf{I}}$ u_0 est bien définie et $u_0 \geq 0$, donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$, et montrons la propriété au rang n.

Puisque $u_{n-1} \geq 0$ par hypothèse de récurrence, $n + u_{n-1} \geq 0$, et $u_n = \sqrt{n + u_{n-1}}$ est bien défini et positif. D'où la propriété au rang n.

Par principe de récurrence, u_n est bien défini et positif pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Vérifions à présent l'inégalité demandée. Tout d'abord, $u_0 \geq 0 = \sqrt{0}$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$n \leq n + u_{n-1}, \text{ d'où } \sqrt{n} \leq \sqrt{n + u_{n-1}} = u_n$$

par croissance de la fonction racine carrée. Ainsi, $\boxed{u_n \geq \sqrt{n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Puisque $\sqrt{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, on en déduit par théorème de comparaison que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \text{ existe et vaut } +\infty.}$

2. (a) Pour tout $x \geq 0$:

$$\frac{1+x}{2} - \sqrt{x} = \frac{1 + x - 2\sqrt{x}}{2} = \frac{(1-\sqrt{x})^2}{2} \boxed{\geq 0.}$$

D'où l'inégalité souhaitée.

(b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n}$.

$\boxed{\mathbf{I}}$ Comme $u_0 \leq 0 + \frac{u_0}{2^0}$, la propriété est vraie pour $n = 0$.

$\boxed{\mathbf{H}}$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang $n-1$. Montrons qu'elle est vraie au rang n.

On applique l'inégalité de la question précédente à $x = n + u_{n-1}$:

$$u_n = \sqrt{n + u_{n-1}} \leq \frac{1 + n + u_{n-1}}{2} = \frac{1+n}{2} + \frac{u_{n-1}}{2}.$$

Or par hypothèse de récurrence :

$$u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}.$$

En remplaçant dans l'expression précédente, on obtient :

$$u_n \leq \frac{1+n}{2} + \frac{n-1}{2} + \frac{u_0}{2^n} = n + \frac{u_0}{2^n}.$$

D'où la propriété au rang n.

Par principe de récurrence, $\boxed{u_n \leq n + \frac{u_0}{2^n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leq u_{n-1} \leq n - 1 + \frac{u_0}{2^{n-1}}, \text{ d'où } 0 \leq \frac{u_{n-1}}{n^2} \leq \frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}}$$

Puisque $\frac{n-1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{u_0}{n^2 2^{n-1}} \underset{n\to+\infty}{\to} 0$, par le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n^2}$ existe et vaut 0. Ainsi, $\boxed{u_{n-1} \underset{n\to+\infty}{=} o(n^2).}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{u_n}{n} = \frac{\sqrt{n+u_{n-1}}}{n} = \sqrt{\frac{n+u_{n-1}}{n^2}} = \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2}}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} + \frac{u_{n-1}}{n^2} = 0$ par la question précédente, $\left(\frac{u_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ converge vers 0, et $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} o(n).}$

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Alors :

$$\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1 + \frac{u_{n-1}}{n}}.$$

Écrivons :

$$\frac{u_{n-1}}{n} = \frac{u_{n-1}}{n-1}\frac{n-1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{u_{n-1}}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

par la question précédente. Ainsi, $\frac{u_n}{\sqrt{n}} = \sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} \underset{n\to+\infty}{\to} 1$, qui se récrit $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}.}$

3. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = u_n - \sqrt{n} = \sqrt{n+u_{n-1}} - \sqrt{n} = \sqrt{n}\left(\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1\right)$$

Or, on a montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n-1}}{n} = 0$. Avec l'équivalent usuel suivant :

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{2}x$$

il vient :

$$\sqrt{1+\frac{u_{n-1}}{n}} - 1 \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\frac{u_{n-1}}{n}.$$

Puisque $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}$, on obtient :

$$v_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{u_{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n-1}}{2n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{n}\frac{\sqrt{n}}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \frac{1}{2}.}$

(b) Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{2}$, alors $v_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{2} + o(1)$, qui se récrit :

$$\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1).}$$

4. (a) On multiplie par la quantité conjuguée :

$$\sqrt{n} - \sqrt{n-1} = \frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{n-(n-1)}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}.$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1}) = 0.}$

D'autre part, $u_n \underset{n\to+\infty}{=} \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$, d'où en remplaçant :

$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= (\sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)) - (\sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + o(1)) \\ &= (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty}(u_n - u_{n-1}) = 0.}$

(b) Calculons :

$$\begin{aligned}
u_{n+1}-u_n &= \sqrt{n+u_n}-\sqrt{n-1+u_{n-1}} \\
&= \frac{(\sqrt{n+u_n}-\sqrt{n-1+u_{n-1}})(\sqrt{n+u_n}+\sqrt{n-1+u_{n-1}})}{\sqrt{n+u_n}+\sqrt{n-1+u_{n-1}}} \\
&= \frac{(n+u_n)-(n-1+u_{n-1})}{\sqrt{n+u_n}+\sqrt{n-1+u_{n-1}}} = \frac{1+u_n-u_{n-1}}{\sqrt{n+u_n}+\sqrt{n-1+u_{n-1}}}.
\end{aligned}$$

La quantité au dénominateur étant toujours positive, $u_{n+1}-u_n$ est du signe de $1+u_n-u_{n-1}$. Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+u_n-u_{n-1}=1$, il existe un rang $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geq N$, $1+u_n-u_{n-1}\geq 0$.

Ainsi, pour tout $n\geq N$, $u_{n+1}-u_n\geq 0$, et $\boxed{(u_n) \text{ est croissante à partir d'un certain rang.}}$